Aufgabe F16T2A3 (12 Punkte)

Sei $f = x^4 - 6x^2 - 14 \in \mathbb{Q}[x]$.

(a) Zeigen Sie, dass $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3+\sqrt{23}}, \sqrt{-14})$ der Zerfällungskörper von f ist.

(b) Zeigen Sie: $[K : \mathbb{Q}] = 8$

Lösung:

zu (a) Wir bestimmen zunächst alle komplexen Nullstellen von f. Für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt die Äquivalenz

$$f(\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^4 - 6\alpha^2 - 14 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^4 - 6\alpha^2 + 9 = 23 \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha^2 - 3)^2 = 23$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha^2 - 3 = \pm\sqrt{23} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 = 3 \pm \sqrt{23} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \in \left\{ \pm\sqrt{3 \pm \sqrt{23}} \right\}.$$

Die vier komplexen Nullstellen von f sind also gegeben durch

$$\alpha_1 = \sqrt{3+\sqrt{23}} \quad , \quad \alpha_2 = -\sqrt{3+\sqrt{23}} \quad , \quad \alpha_3 = \sqrt{3-\sqrt{23}} \quad , \quad \alpha_4 = -\sqrt{3-\sqrt{23}}.$$

Der Zerfällungskörper von f ist nach Definition der Körper $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$. Zu zeigen ist also

$$\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \quad = \quad \mathbb{Q}(\sqrt{3+\sqrt{23}}, \sqrt{-14}).$$

„$\supseteq$“ Das Element $\sqrt{3+\sqrt{-23}} = \alpha_1$ ist jedenfalls im Körper auf der linken Seite der Gleichung enthalten. Darüber hinaus gilt $\alpha_1^2\alpha_3^2 = (3+\sqrt{23})(3-\sqrt{23}) = 9 - 23 = -14$, also enthält der Körper links mit α_1 und α_3 auch $\{\pm\alpha_1\alpha_3\} = \{\pm\sqrt{-14}\}$.

„$\subseteq$“ Die Elemente $\alpha_1 = \sqrt{3+\sqrt{-23}}$ und $\alpha_2 = -\sqrt{3+\sqrt{-23}}$ sind im Körper auf der rechten Seite der Gleichung enthalten. Da wie bereits festgestellt $\alpha_1\alpha_3 = \sqrt{-14}$ oder $\alpha_1\alpha_3 = -\sqrt{-14}$ gilt, ist auch $\{\alpha_3, \alpha_4\} = \{\pm\sqrt{-14}\alpha_1^{-1}\}$ Teilmenge des Körpers rechts.

zu (b) In Teil (a) wurde gezeigt, dass α_1 Nullstelle des Polynoms f ist. Dieses Polynom ist außerdem normiert und nach dem Eisenstein-Kriterium (angewendet auf $p = 2$) irreduzibel. Also ist f das Minimalpolynom von f, und es folgt $[\mathbb{Q}(\alpha_1) : \mathbb{Q}] = \mathrm{grad}(f) = 4$. Das Element $\sqrt{-14}$ ist Nullstelle von $g = x^2 + 14$. Auch dieses Polynom ist normiert. Wegen $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ gilt $\mathbb{Q}(\alpha_1) \subseteq \mathbb{R}$; die Nullstellen $\pm\sqrt{-14}$ sind andererseits Elemente von $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und somit nicht in $\mathbb{Q}(\alpha_1)$ enthalten. Wegen $\mathrm{grad}(g) = 2$ folgt daraus, dass g über $\mathbb{Q}(\alpha_1)$ irreduzibel ist. Insgesamt handelt es sich bei g also um das Minimalpolynom von $\sqrt{-14}$ über $\mathbb{Q}(\alpha_1)$. Wir erhalten $[\mathbb{Q}(\alpha_1, \sqrt{-14}) : \mathbb{Q}(\alpha_1)] = \mathrm{grad}(g) = 2$ und mit der Gradformel insgesamt

$$[K : \mathbb{Q}] \quad = \quad [\mathbb{Q}(\alpha_1, \sqrt{-14}) : \mathbb{Q}(\alpha_1)] \cdot [\mathbb{Q}(\alpha_1) : \mathbb{Q}] \quad = \quad 2 \cdot 4 \quad = \quad 8.$$