Aufgabe F16T2A2 (12 Punkte)

Sei

$$R = \mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}\ , \quad i^2 = -1,$$

der Ring der ganzen Gaußschen Zahlen. Sei

$$I = 25\mathbb{Z} + (7+i)\mathbb{Z} = \{25x + (7+i)y \mid x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

Die Menge I ist ein Ideal in R (Nachweis nicht erforderlich).

(a) Zeigen Sie, dass $\varphi : \mathbb{Z} \to R/I$, $a \mapsto a + I$ surjektiv ist und bestimmen Sie den Kern von φ.

(b) Zeigen Sie, dass die Gruppe $(R/I)^\times$ der Einheiten von R/I zyklisch von Ordnung 20 ist.

(c) Wie viele verschiedene Erzeuger von $(R/I)^\times$ gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

zu (a) Zunächst bestimmen wir ein Urbild der Restklasse $i+I$. Wegen $7+i \in I$ gilt in R/I die Gleichung $i + I = (-7) + I$, also $\varphi(-7) = (-7) + I = i + I$. Ist nun ein beliebiges Element $(a + bi) + I \in R/I$ vorgegeben, mit $a, b \in \mathbb{Z}$, dann gilt $\phi(a+(-7)b) = \phi(a)+\phi(-7)\phi(b) = (a+I)+(i+I)(b+I) = (a+bi)+I$. Damit ist die Surjektivität nachgewiesen. Für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt die Äquivalenz

$$a \in \ker(\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(a) = 0 + I \quad \Leftrightarrow \quad a + I = 0 + I \quad \Leftrightarrow \quad a \in I \quad \Leftrightarrow$$

$$\exists\ x, y \in \mathbb{Z} : a = 25x + y(7+i) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\ x, y \in \mathbb{Z} : a = (25x + 7y) + yi \quad \Leftrightarrow$$

$$\exists\ x \in \mathbb{Z} : a = 25x \quad \Leftrightarrow \quad a \in 25\mathbb{Z}.$$

Also gilt $\ker(\varphi) = 25\mathbb{Z}$.

zu (b) Auf Grund der Ergebnisse aus Teil (a) können wir den Homomorphiesatz anwenden und erhalten einen Isomorphismus $R/I \cong \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$ von Ringen. Dieser induziert einen Isomorphismus $(R/I)^\times \cong (\mathbb{Z}/25\mathbb{Z})^\times$ zwischen den Einheitengruppen. Weil es sich bei 25 um eine ungerade Primzahlpotenz handelt, ist die Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/25\mathbb{Z})^\times$ zyklisch von Ordnung $\varphi(25) = 20$.

zu (c) Allgemein besitzt eine zyklische Gruppe der Ordnung n genau $\varphi(n)$ erzeugende Elemente, für alle $n \in \mathbb{N}$. Da die Gruppe $(\mathbb{Z}/25\mathbb{Z})^\times$ zyklisch von Ordnung 20 ist, besitzt sie genau $\varphi(20) = \varphi(4)\varphi(5) = 2 \cdot 4 = 8$ erzeugende Elemente.