Aufgabe F16T2A1 (14 Punkte)

(a) Sei p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elementen. Die Menge

$$G \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b \in \mathbb{F}_p \;,\; a \neq \bar{0} \right\}$$

ist eine Untergruppe der Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ (Nachweis nicht erforderlich). Zeigen Sie, dass G auflösbar ist.

(b) Sei nun G eine beliebige Gruppe der Ordnung $p(p-1)$. Zeigen Sie, dass es genau eine Untergruppe H von G der Ordnung p gibt. Zeigen Sie weiter, dass G genau dann auflösbar ist, wenn G/H auflösbar ist.

(c) Sei $C = \mathbb{Z}/61\mathbb{Z} \times A_5$ das direkte Produkt der zyklischen Gruppe der Ordnung 61 und der alternierenden Gruppe A_5. Ist C auflösbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

zu (a) Die Abbildung $\det : G \to \mathbb{F}_p^\times$ ist ein Gruppenhomomorphismus, denn bekanntlich ist die Determinantenabbildung multiplikativ, d.h. es gilt $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ für alle $A, B \in G$. Der Kern dieser Abbildung ist gegeben durch

$$N \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \;\middle|\; b \in \mathbb{F}_p \right\}$$

denn für alle $a, b \in \mathbb{F}_p$ mit $a \neq \bar{0}$ gilt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \in \ker(\det) \quad \Leftrightarrow \quad \det \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = \bar{1} \quad \Leftrightarrow \quad a \quad = \quad \bar{1} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \in N.$$

Außerdem ist der Homomorphismus surjektiv, denn für vorgegebenes $a \in \mathbb{F}_p^\times$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} a & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = a.$$

Durch Anwendung des Homomorphiesatzes erhalten wir $G/N \cong \mathbb{F}_p^\times$. Die Gruppe $\mathbb{F}_p^\times$ ist (als multiplikative Gruppe eines Körpers) abelsch, somit ist auch G/N abelsch und insbesondere auflösbar. Die Gruppe N ist von Primzahlordnung p, damit zyklisch und ebenfalls auflösbar. Aus der Auflösbarkeit von N und G/N folgt die Auflösbarkeit von G.

zu (b) Wegen $p \nmid (p-1)$ teilt p die Ordnung von G nur einfach, damit sind die p-Sylowgruppen von G genau die Untergruppen der Ordnung p. Sei ν_p die Anzahl der p-Sylowgruppen von G. Auf Grund der Sylowsätze gilt $\nu_p | (p-1)$ und $\nu_p \equiv 1 \bmod p$. Da $1 + kp$ für alle $k \geq 1$ größer als $p - 1$ ist, muss $\nu_p = 1$ gelten. Also besitzt G genau eine Untergruppe H der Ordnung p.

Als einzige p-Sylowgruppe ist H ein Normalteiler von G, und jede Faktorgruppe einer auflösbaren Gruppe ist auflösbar. Also folgt aus der Auflösbarkeit von G die Auflösbarkeit von G/H. Setzen wir umgekehrt voraus, dass G/H auflösbar ist. Weil H von Primzahlordnung p ist, handelt es sich um eine zyklische und damit auflösbare Gruppe. Mit G/H und H ist auch G auflösbar.

zu (c) Nehmen wir an, dass C auflösbar ist, und betrachten wir den Homomorphismus $\pi : C \to A_5$, der durch Projektion auf die zweite Komponente gegeben ist. Dieser Homomorphismus ist surjektiv, denn für vorgegebenes $\sigma \in A_5$ gilt $\pi(\bar{0}, \sigma) = \sigma$. Setzen wir $N = \ker(\phi)$, dann folgt $C/N \cong A_5$ auf Grund des Homomorphiesatzes. Nun ist jede Faktorgruppe einer auflösbaren Gruppe auflösbar. Aus der Auflösbarkeit von C würde also die Auflösbarkeit von C/N und A_5 folgen. Aber aus der Vorlesung ist bekannt, dass A_5 nicht auflösbar ist.