Aufgabe F16T1A5 (12 Punkte)

Für eine primitive fünfte Einheitswurzel in $\mathbb{C}$ gilt die Formel

$$\zeta_5 \quad = \quad e^{\frac{2\pi i}{5}} \quad = \quad \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{8}} \quad ;$$

diese Formel kann im Folgenden ohne Beweis verwendet werden.

(a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{8}}$ über $\mathbb{Q}$.

(b) Zeigen Sie: $i \notin \mathbb{Q}(\zeta_5)$

Lösung:

zu (a) Wir bestimmen ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[x]$, das α als Nullstelle hat. Es gilt

$$\alpha^2 = \frac{\sqrt{5}+5}{8} \quad \Rightarrow \quad 8\alpha^2 = \sqrt{5}+5 \quad \Rightarrow \quad 8\alpha^2 - 5 = \sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad (8\alpha^2-5)^2 = 5 \quad \Rightarrow$$

$$64\alpha^4 - 80\alpha^2 + 25 = 5 \quad \Rightarrow \quad 64\alpha^4 - 80\alpha^2 + 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^4 - \tfrac{5}{4}\alpha^2 + \tfrac{5}{16} = 0.$$

Also ist α eine Nullstelle von $f = x^4 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{5}{16}$. Außerdem ist dieses Polynom normiert. Für die Irreduzibilität genügt es nachzuweisen, dass $g = 16f = 16x^4 - 20x^2 + 5 \in \mathbb{Z}[x]$ irreduzibel ist, denn f und g unterscheiden sich nur um eine Einheit in $\mathbb{Q}[x]$. Die Irreduzibilität von g folgt aus dem Eisenstein-Kriterium: Das Polynom g ist primitiv, denn die Koeffizienten $16, -20, 5$ haben keinen gemeinsamen Primteiler. Die Primzahl 5 teilt die Koeffizienten -20 und 5, aber nicht den Leitkoeffizienten 16, und 5^2 ist kein Teiler des konstanten Terms 5. Also ist das Eisenstein-Kriterium auf $p = 5$ anwendbar. Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass f das Minimalpolynom von α ist.

zu (b) Mit ζ_5 ist auch $\zeta_5^{-1} = \bar{\zeta}_5 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{8}}$ in $\mathbb{Q}(\zeta_5)$ enthalten, und damit auch $\zeta_5 + \zeta_5^{-1} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$. Dies zeigt, dass auch $\sqrt{5}$ in $\mathbb{Q}(\zeta_5)$ liegt. Nehmen wir nun an, es gilt auch $i \in \mathbb{Q}(\zeta_5)$. Aus $\zeta_5, \sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\zeta_5)$ folgt $i\alpha \in \mathbb{Q}(\zeta_5)$, und mit $i \in \mathbb{Q}(\zeta_5)$ erhalten wir $\alpha \in \mathbb{Q}(\zeta_5)$.

Dies zeigt, dass $\mathbb{Q}(\alpha)$ ein Teilkörper von $\mathbb{Q}(\zeta_5)$ ist. Da f das Minimalpolynom von α ist, gilt $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = \mathrm{grad}(f) = 4$. Für $\mathbb{Q}(\zeta_5)$ als Kreisteilungskörper gilt ebenso $[\mathbb{Q}(\zeta_5) : \mathbb{Q}] = \varphi(5) = 4$ (wobei φ die Eulersche φ-Funktion bezeichnet. Aus $\mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_5)$ und $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 4 = [\mathbb{Q}(\zeta_5) : \mathbb{Q}]$ folgt $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\zeta_5)$. Aber andererseits ist $\mathbb{Q}(\alpha)$ wegen $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Teilkörper von $\mathbb{R}$, während ζ_5 nicht in $\mathbb{R}$ liegt. Also können $\mathbb{Q}(\alpha)$ und $\mathbb{Q}(\zeta_5)$ nicht übereinstimmen. Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme $i \in \mathbb{Q}(\zeta_5)$ falsch war.

Anmerkung: Es gibt noch eine weitere Möglichkeit, $i \notin \mathbb{Q}(\zeta_5)$ nachzuweisen. Würde i in $\mathbb{Q}(\zeta_5)$ liegen, dann würde $\mathbb{Q}(\zeta_5)$ mit $i\zeta_5$ eine primitive 20-te Einheitswurzel und somit einen Teilkörper vom Grad $[\mathbb{Q}(i\zeta_5) : \mathbb{Q}] = \varphi(20) = 8$ enthalten. Aber dies ist wegen $[\mathbb{Q}(\zeta_5) : \mathbb{Q}] = 4$ unmöglich.