Aufgabe F16T1A4 (12 Punkte)

Es seien $1 < D \in \mathbb{Z}$ und $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-D}]$.

(a) Zeigen Sie: Die Einheitengruppe von R ist $R^\times = \{\pm 1\}$.

Von nun an sei $D = 13$.

(b) Zeigen Sie, dass 2 und $1 + \sqrt{-13}$ in R irreduzibel sind.

(c) Zeigen Sie, dass $2 \in R$ kein Primelement ist.

Hinweis: Man benutze die Normabbildung $N(a + b\sqrt{-D}) = a^2 + Db^2$.

Lösung:

zu (a) Die Elemente ± 1 sind Einheiten, denn offenbar gilt $1 \cdot 1 = 1$ und $(-1)(-1) = 1$. Zum Beweis der Umkehrung bezeichnen wir mit $N : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ die Abbildung gegeben durch $N(z) = z\bar{z} = |z|^2$. Ist $\alpha \in R$, $\alpha = a + \sqrt{-D}b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$, dann gilt $N(z) = \alpha\bar{\alpha} = (a + \sqrt{-D}b)(a - \sqrt{-D}b) = a^2 + Db^2$. Dies zeigt, dass $N|_R$ nur Werte in $\mathbb{N}_0$ annimmt und den Wert 0 nur dann, wenn $\alpha = 0$ ist. Außerdem bemerken wir, dass N multiplikativ ist: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$N(zw) \quad = \quad (zw)(\overline{zw}) \quad = \quad (z\bar{z})(w\bar{w}) \quad = \quad N(z)N(w).$$

Sei nun $\alpha \in \mathbb{R}^\times$ eine beliebige Einheit. Dann gibt es ein $\beta \in R$ mit $\alpha\beta = 1$. Es folgt $N(\alpha)N(\beta) = N(\alpha\beta) = N(1) = 1$. Weil α und β in $R \setminus \{0\}$ liegen, gilt $N(\alpha), N(\beta) \in \mathbb{N}$. Das Produkt zweier natürlicher Zahlen kann nur dann gleich 1 sein, wenn beide Faktoren gleich 1 sind. Daraus folgt $N(\alpha) = 1$. Schreiben wir $\alpha = a + \sqrt{-D}b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$, dann erhalten wir $a^2 + Db^2 = 1$. Wegen $D > 1$ muss $b = 0$ sein, und daraus wiederum folgt $a \in \{\pm 1\}$. Es gilt also $(a, b) \in \{(\pm 1, 0)\}$, und daraus folgt $\alpha \in \{\pm 1\}$.

zu (b) Zunächst einmal ist $2 \neq 0$ und wegen $R^\times = \{\pm 1\}$ keine Einheit. Nehmen wir nun an, es gilt $2 = \alpha\beta$ für zwei Nicht-Einheiten $\alpha, \beta \in R$. Dann ist $N(\alpha)N(\beta) = 2 \cdot 2 = 4$. Wie wir unter (a) gesehen haben, sind die Elemente mit Norm 1 Einheiten. Wegen $N(\alpha), N(\beta) \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $N(\alpha)N(\beta) = 4$ kann somit nur $N(\alpha) = N(\beta) = 2$ gelten. Aber in R gibt es keine Elemente mit Norm 2. Wäre nämlich $N(\alpha) = 2$ und $\alpha = a + b\sqrt{-13}$, dann würde $a^2 + 13b^2 = 2$ folgen. Dies zeigt, dass b gleich Null sein muss, aber die Gleichung $a^2 = 13$ ist mit $a \in \mathbb{Z}$ nicht lösbar. Also gibt es keine Zerlegung von 2 also Produkt von Nicht-Einheiten, und folglich ist 2 in R irreduzibel.

Auch das Element $1 + \sqrt{-13}$ ist ungleich Null und wegen $N(1 + \sqrt{-13}) = 1^2 + 13 \cdot 1^2 = 14 \neq 1$ auch keine Einheit. Nehmen wir an, dass $1 + \sqrt{-13} = \alpha\beta$ eine Zerlegung von $1 + \sqrt{-13}$ in Nicht-Einheiten ist. Dann folgt $N(\alpha)N(\beta) = N(1 + \sqrt{-13}) = 14$. Wegen $N(\alpha), N(\beta) \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ muss einer der Faktoren $N(\alpha)$ oder $N(\beta)$ gleich 2 sein (und der andere gleich 7). Aber dies steht im Widerspruch dazu, dass R keine Elemente der Norm 2 besitzt. Also ist auch $1 + \sqrt{-13}$ irreduzibel.

zu (c) Die Zahl 2 ist ein Teiler von $(1+\sqrt{-13})(1-\sqrt{-13}) = 14$, denn es ist $14 = 2 \cdot 7$. Wäre 2 ein Primelement in R, dann müsste 2 eines der beiden Elemente $1 \pm \sqrt{-13}$ teilen. Im ersten Fall würde ein Element $\gamma \in R$ mit $1+\sqrt{-13} = 2\gamma$ existieren. Aber diese Gleichung impliziert $\gamma = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-13}$, und dieses Element ist nicht in R enthalten. Also kann der erste Fall nicht eintreten. Ist 2 ein Teiler von $1-\sqrt{-13}$, dann gibt es ein $\gamma \in R$ mit $1-\sqrt{-13} = 2\gamma$. Aber dann folgt $\gamma = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-13}$, und dieses Element liegt ebenfalls nicht in R. Also teilt 2 keinen der beiden Faktoren, und somit ist 2 kein Primelement.