Aufgabe F16T1A3 (16 Punkte)

Es sei $(A, +)$ eine abelsche Gruppe, und es sei $(H, \cdot)$ eine Gruppe mit einem Normalteiler $N \trianglelefteq H$ vom Index 2. Zeigen Sie:

(a) Sind $x, y \in H \setminus N$, dann ist $xy \in N$.

(b) Die auf $A \times H$ definierte Verknüpfung

$$(a,x) * (b,y) \quad = \quad \begin{cases} (a+b, xy) & \text{falls } x \in N \ , \\ (a-b, xy) & \text{falls } x \in H \setminus N \ , \end{cases}$$

ist assoziativ.

Im Folgenden darf ohne Beweis benutzt werden, dass $A \times H$ mit dieser Verknüpfung eine Gruppe mit neutralem Element $(0_A, 1_H)$ bildet.

(c) Ist $x \in H \setminus N$ ein Element der Ordnung 2, und ist $a \in A$, dann hat (a, x) in der Gruppe $(A \times H, *)$ die Ordnung 2.

(d) Es gibt eine Gruppe der Ordnung 42, die weder ein Element der Ordnung 6 noch ein Element der Ordnung 14 enthält.

Lösung:

zu (a) Wegen $(H : N) = 2$ und $x \notin N$ besteht H/N aus den beiden (verschiedenen) Elementen N und xN. Wegen $y \notin N$ gilt $yN \neq N$ und somit $yN = xN$. Weil H/N eine Gruppe der Ordnung 2 ist, gilt $(xN)^2 = e_{H/N} = N$. Es folgt $(xy)N = (xN)(yN) = (xN)(xN) = (xN)^2 = N$ und somit $xy \in N$.

zu (b) Seien $(a,x), (b,y), (c,z) \in A \times H$ vorgegeben. Zu zeigen ist $((a,x) * (b,y)) * (c,z) = (a,x) * ((b,y) * (c,z))$. Wir unterscheiden dafür vier Fälle. Sind $x, y \in N$, dann gilt dasselbe für xy. Daraus folgt $((a,x) * (b,y)) * (c,z) = (a+b, xy) * (c,z) = ((a+b)+c, (xy)z) = (a+(b+c), x(yz))$, wobei im letzten Schritt verwendet wurde, dass das Assoziativgesetz in den Gruppen A und H gültig ist. Andererseits gilt auch $(a,x) * ((b,y) * (c,z)) = (a,x) * (b+c, yz) = (a+(b+c), x(yz))$. Betrachten wir nun den Fall $x \in N$ und $y \notin N$. Dann gilt auch $xy \notin N$, denn ansonsten wäre mit x^{-1} auch $x^{-1}(xy) = y$ ein Element von N, im Widerspruch zur Annahme. Wir erhalten einerseits

$$((a,x) * (b,y)) * (c,z) \quad = \quad (a+b, xy) * (c,z) \quad = \quad ((a+b)-c, (xy)z) \quad = \quad (a+(b-c), x(yz))$$

und andererseits auch $(a,x) * ((b,y) * (c,z)) = (a,x) * (b-c, yz) = (a+(b-c), x(yz))$. Sei nun $x \notin N$ und $y \in N$. Auch in diesem Fall gilt $xy \notin N$, denn sonst wäre mit y^{-1} auch $(xy)y^{-1} = x$ ein Element aus N. Somit gilt einerseits

$$((a,x) * (b,y)) * (c,z) \quad = \quad (a-b, xy) * (c,z) \quad = \quad ((a-b)-c, (xy)z) \quad = \quad (a-(b+c), x(yz))$$

und andererseits auch $(a,x) * ((b,y) * (c,z)) = (a,x) * (b+c, yz) = (a-(b+c), x(yz))$. Es bleibt der Fall $x, y \notin N$ zu betrachten. Wie unter (a) gezeigt, gilt hier $xy \in N$. Wir erhalten einerseits $((a,x) * (b,y)) * (c,z) = (a-b, xy) * (c,z) = ((a-b)+c, (xy)z) = (a-(b-c), x(yz))$ und andererseits $(a,x) * ((b,y) * (c,z)) = (a,x) * (b-c, yz) = (a-(b-c), x(yz))$. Also ist das Assoziativgesetz in jedem der vier Fälle erfüllt.

zu (c) Sei $x \in H \setminus N$ mit $\mathrm{ord}(x) = 2$ und $a \in A$. Dann gilt $(a,x) \neq (0_A, 1_H)$ wegen $1_H \in N$ und $x \notin N$. Andererseits ist $x^2 = 1_H$ und somit $(a,x)^2 = (a,x) * (a,x) = (a-a, x^2) = (0_A, 1_H)$. Daraus folgt insgesamt $\mathrm{ord}(a,x) = 2$.

zu (d) Sei $A = (\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}, +)$, $H = (\{\pm 1\}, \cdot)$ und $(A \times H, *)$ wie in der Angabe definiert. Der eindeutig bestimmte Normalteiler von H vom Index 2 ist die triviale Untergruppe $N = \{1\}$. Nun ist $A \times H$ eine Gruppe der Ordnung $|A \times H| = |A| \cdot |H| = 21 \cdot 2 = 42$. Bezeichnet $(a,x) \in A \times H$ ein beliebiges Element, dann gilt $x = 1$ oder $x = -1$. Im Fall $x = -1$ liegt x in $H \setminus N$, und nach (c) folgt daraus $\mathrm{ord}(a,x) = 2$.

Um die Ordnung im Fall $x = 1$ zu bestimmen, beweisen wir zunächst die Gleichung $(a,1)^n = (n \cdot a, 1)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ durch vollständige Induktion. Zunächst gilt $(a,1)^0 = (0_A, 1_H) = (\bar{0}, 1) = (0 \cdot a, 1)$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$, und setzen wir die Gleichung für dieses n voraus. Dann folgt

$$(a,1)^{n+1} \quad = \quad (a,1)^n * (a,1) \quad = \quad (n \cdot a, 1) * (a,1) \quad = \quad (n \cdot a + a, 1 \cdot 1) = ((n+1)a, 1).$$

Insbesondere gilt $(a,1)^{21} = (21 \cdot a, 1) = (\bar{0}, 1) = (0_A, 1_H)$. Somit ist $\mathrm{ord}(a)$ ein Teiler von 21. Für jedes Element in $(A \times H, *)$ sind also höchstens die Ordnungen 1, 2, 3, 7 oder 21 möglich, insbesondere gibt es keine Elemente der Ordnung 6 oder 14.