Aufgabe F16T1A2 (8 Punkte)

Es sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{n} k^2$ genau dann durch n teilbar ist, wenn n weder durch 2 noch durch 3 teilbar ist.
$\left(\textit{Hinweis: } \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$

Lösung:

Für jede Zahl n ist n genau dann ein Teiler von $\sum_{k=1}^{n} k^2$, wenn $n|\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ gilt. Dies wiederum ist gleichbedeutend damit, dass ein $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \ell n$ existiert, was wiederum genau dann der Fall ist, wenn $\frac{1}{6}(n+1)(2n+1) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 6 \mid (n+1)(2n+1)$ gilt.

Ist n weder durch 2 noch durch 3 teilbar, dann gilt $n \equiv 1 \bmod 6$ oder $n \equiv 5 \bmod 6$. Im ersten Fall gilt $2 \mid (n+1)$ und $3 \mid (2n+1)$, insgesamt also $6 \mid (n+1)(2n+1)$. Im zweiten Fall ist bereits $n+1$ und somit auch $(n+1)(2n+1)$ durch 6 teilbar.

Setzen wir umgekehrt $6 \mid (n+1)(2n+1)$ voraus. Wäre n gerade, dann wären $n+1$ und $2n+1$ beide ungerade, also $6 \mid (n+1)(2n+1)$ ausgeschlossen. Wäre n durch 3 teilbar, dann wären $n+1$ und $2n+1$ beide teilerfremd zu 3, also auch das Produkt dieser Zahlen, was $6 \mid (n+1)(2n+1)$ ebenfalls widerspricht. Also ist n weder durch 2 noch durch 3 teilbar.