**Aufgabe F16T1A1** (12 Punkte)

Es sei $f$ ein Endomorphismus des Euklidischen Vektorraums $\mathbb{R}^n$, und es sei $M$ die Matrix von $f$ bezüglich der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen zueinander äquivalent sind:

(a) $f$ ist eine Orthogonalprojektion auf einen Unterraum der Dimension $k$.

(b) Die Matrix $M$ ist idempotent (d.h. $M^2 = M$), symmetrisch und hat Spur $k$.

*Lösung:*

Beweis von „(a) $\Rightarrow$ (b)" Sei $U = f(\mathbb{R}^n)$ das Bild von $f$ und $(v_1, ..., v_k)$ eine Orthonormalbasis (ON-Basis) von $U$. Mit Hilfe des Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahrens kann diese zu einer ON-Basis $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ von $\mathbb{R}^n$ erweitert werden. Sei $B$ die Darstellungsmatrix von $f$ bezüglich $\mathcal{B}$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $f$ als Orthogonalprojektion die Gleichungen $f(u) = u$ für alle $u \in U$ und $f(v) = 0$ für alle $v$ aus dem Orthogonalraum $U^\perp$ erfüllt. Es gilt also $f(v_i) = v_i$ für $1 \leq i \leq k$ und $f(v_i) = 0$ für $k + 1 \leq i \leq n$, weil die letztgenannten Vektoren zu $v_1, ..., v_k$ senkrecht stehen und somit in $U^\perp$ enthalten sind.

Bezeichnen wir mit $A$ die Darstellungsmatrix von $f$ bezüglich $\mathcal{B}$, dann ist $A$ also eine Diagonalmatrix, deren erste $k$ Einträge gleich 1 und deren übrige Einträge gleich 0 sind. Für die Spur von $A$ gilt also $\mathrm{tr}(A) = k$. Sei nun $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ die Matrix des Basiswechsels von $\mathcal{B}$ zur kanonischen Basis $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$. Dann gilt $M = TAT^{-1}$. Weil $\mathcal{B}$ eine ON-Basis ist, handelt es sich bei $T$ um eine orthogonale Matrix, es gilt also $T^{-1} = {}^{\mathrm{t}}T$. Weil ähnliche Matrizen dieselbe Spur haben, gilt auch $\mathrm{tr}(M) = k$. Mit $A$ ist auch $M$ symmetrisch und idempotent, denn es gilt $M^2 = (TAT^{-1})(TAT^{-1}) = TA^2T^{-1} = TAT^{-1} = M$ und ${}^{\mathrm{t}}M = {}^{\mathrm{t}}(TAT^{-1}) = {}^{\mathrm{t}}(T^{-1}){}^{\mathrm{t}}A{}^{\mathrm{t}}T = TAT^{-1} = M$.

Beweis von „(a) $\Rightarrow$ (b)" Sei $V = \mathbb{R}^n$ und $U = f(V)$. Nach Definition von $f$ und $M$ gilt $f(v) = Mv$. Weil $M$ symmetrisch ist, gilt $\langle \phi_M(v), w\rangle = \langle v, \phi_M(w)\rangle$ für alle $v, w \in V$. Um zu zeigen, dass $f$ eine Orthogonalprojektion auf $U$ ist, müssen wir $\langle u, f(v) - v\rangle$ für alle $u \in U$ und $v \in V$ nachweisen. Sei $w \in V$ ein Vektor mit $f(w) = u$. Weil $M$ idempotent ist, gilt zunächst $f(u) = f^2(w) = M^2w = Mw = u$. Es folgt

$$\langle u, f(v) - v\rangle \quad = \quad \langle u, f(v)\rangle - \langle u, v\rangle \quad = \quad \langle f(u), v\rangle - \langle u, v\rangle \quad = \quad \langle u, v\rangle - \langle u, v\rangle \quad = \quad 0.$$

Sei nun $\ell = \dim U$, $(v_1, ..., v_\ell)$ eine ON-Basis von $U$ und $(v_1, ..., v_n)$ eine Erweiterung zu einer ON-Basis von $V$. Wie bereits im ersten Teil des Beweises ausgeführt, ist die Spur von $M$ dann gleich $\ell$. Wir erhalten $\dim U = \ell = \mathrm{tr}(M) = k$. Damit sind alle Aussagen aus (a) nachgewiesen.