Aufgabe F15T3A5 (12 Punkte)

Es sei eine Galoiserweiterung $E|K$ mit zyklischer Galoisgruppe gegeben, so dass $[E : K] = p^n$ gilt mit einer Primzahl p und $n \geq 1$. Weiter sei $K \subseteq F \subseteq E$ ein Zwischenkörper mit $[F : K] = p^{n-1}$. Zeigen Sie: Jedes Element von $E \setminus F$ ist ein primitives Element von E über K.

Lösung:

Sei $G = \mathrm{Gal}(E|K)$ und $\alpha \in E \setminus F$. Zu zeigen ist $E = K(\alpha)$. Wir definieren in G die beiden Untergruppen $U = \mathrm{Gal}(E|K(\alpha))$ und $V = \mathrm{Gal}(E|F)$. Nach dem Hauptsatz der Galoistheorie ist $E = K(\alpha)$ gleichbedeutend damit, dass die beiden zugehörigen Untergruppen von G, nämlich $\{\mathrm{id}_E\}$ und U, übereinstimmen. Unser Ziel ist also der Beweis der Gleichung $U = \{\mathrm{id}_E\}$.

Nach Voraussetzung gilt $\alpha \in E \setminus F$, also $K(\alpha) \nsubseteq F$ und somit $U \nsupseteq V$. Außerdem gilt

$$|V| \quad = \quad [E : F] \quad = \quad \frac{[E : K]}{[F : K]} \quad = \quad \frac{p^n}{p^{n-1}} \quad = \quad p.$$

Da G zyklisch ist, besitzt G für jeden Teiler d von p^n genau eine Untergruppe der Ordnung d, und eine weiteren Untergruppen. Für jedes $k \in \{0, ..., n\}$ gibt es also genau eine Untergruppe U_k der Ordnung p^k, außerdem gilt $U_k \subseteq U_\ell \Leftrightarrow k \leq \ell$ für alle k, ℓ. Es gilt also $V = U_1$ und $U = U_k$ für ein $k \in \{0, ..., n\}$. Wegen $V \nsubseteq U \Leftrightarrow U_1 \nsubseteq U_k$ ist $k \geq 1$ ausgeschlossen, es muss also $k = 0$ sein. Aber daraus folgt $U = U_0 = \{\mathrm{id}_L\}$.