Aufgabe F15T3A3 (4+4+4 Punkte)

Ein Ring R mit Eins heißt *idempotent*, wenn $a \cdot a = a$ für alle $a \in R$ gilt. Beweisen Sie:

(a) $-1 = 1$ in R

(b) Jeder idempotente Ring ist kommutativ.

(c) Jeder idempotente Integritätsbereich ist isomorph zu $\mathbb{F}_2$, dem Körper mit zwei Elementen.

Hinweis: Abweichend von der sonst üblichen Konvention in der Algebra-Vorlesung ist die Multiplikation in einem Ring hier also *nicht* notwendigerweise kommutativ.

Lösung:

zu (a) Wie in jedem Ring gilt $(-a)(-b) = ab$ für alle $a, b \in R$, und bei Nachweis dieser Rechenregel wird das Kommutativgesetz der Multiplikation nicht benötigt. Denn zunächst gilt für alle $a, b \in R$ nämlich

$$(-a)b + ab \quad = \quad ((-a) + a)b \quad = \quad 0 \cdot b \quad = \quad 0$$

und somit $-(ab) = (-a)b$ nach Definition des Negativen. Ebenso erhält man

$$a(-b) + ab \quad = \quad a((-b) + b) \quad = \quad a \cdot 0 \quad = \quad 0$$

und $-(ab) = a(-b)$ für alle $a, b \in R$. Wendet man diese beiden Rechenregeln nun nacheinander an, so folgt

$$ab \quad = \quad -(-ab) \quad = \quad -(a(-b)) \quad = \quad (-a)(-b)$$

für alle $a, b \in R$. Insbesondere gilt $-1 = (-1)(-1) = 1 \cdot 1 = 1$, wobei im ersten Schritt die Idempotenz verwendet wurde.

zu (b) Sei R ein idempotenter Ring, und seien $a, b \in R$ vorgegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 \quad &= \quad a + b \quad = \quad (a+b)^2 \quad = \quad (a+b)(a+b) \quad = \quad (a+b)a + (a+b)b \\ &= \quad a^2 + ba + ab + b^2 \end{aligned}$$

Durch Addition von $-a^2 - b^2$ auf beide Seiten erhält man $0 = ba + ab$ und mit (a) somit $ba = -ab = (-1)ab = 1 \cdot ab = ab$.

zu (c) Sei R ein idempotenter Integrittatsbereich. Nach Teil (b) ist R kommutativ, und weil R ein Integritätsbereich ist, gilt $0 \neq 1$ in R. Wir zeigen, dass 0 und 1 die einzigen beiden Elemente in R sind. Sei dazu $a \in R$ beliebig vorgegeben. Es gilt

$$a^2 = a \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a(a-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \vee a - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \in \{0, 1\}.$$

Dabei wurde im dritten Schritt verwendet, dass R ein Integritätsbereich ist. Damit ist $R = \{0, 1\}$ bewiesen. Wir zeigen nun noch, dass die Abbildung $\phi : \mathbb{F}_2 \to R$ gegeben durch $\phi(\bar{0}) = 0$ und $\phi(\bar{1}) = 1$ ein Isomorphismus von Ringen ist. Zunächst ist ϕ offenbar bijektiv, und das Einselement $\bar{1}$ von $\mathbb{F}_2$ wird auf das Einselement 1 von R abgebildet. Seien nun $a, b \in \mathbb{F}_2$ vorgegeben. Zu zeigen ist

$$\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b) \qquad \text{und} \qquad \phi(ab) = \phi(a)\phi(b).$$

Im Fall $a = \bar{0}$ gilt

$$\phi(a+b) \quad = \quad \phi(\bar{0}+b) \quad = \quad \phi(b) \quad = \quad 0+\phi(b) \quad = \quad \phi(\bar{0}) \quad = \quad \phi(a)+\phi(b)$$

und

$$\phi(ab) \quad = \quad \phi(\bar{0}\cdot b) \quad = \quad \phi(\bar{0}) \quad = \quad 0 \quad = \quad 0\cdot\phi(b) \quad = \quad \phi(\bar{0})\phi(b) \quad = \quad \phi(a)\phi(b).$$

Ebenso beweist man die Gleichungen $\phi(a+b) = \phi(a)+\phi(b)$ und $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ im Fall $b = \bar{0}$. Der einzige verbleibende Fall ist somit $a = b = \bar{1}$. Weil $(R,+)$ eine Gruppe der Ordnung 2 ist, muss in R die Gleichung $1+1=0$ gelten. Es folgt

$$\phi(a+b) \quad = \quad \phi(\bar{1}+\bar{1}) \quad = \quad \phi(\bar{0}) \quad = \quad 0 \quad = \quad 1+1 \quad = \quad \phi(a)+\phi(b)$$

und

$$\phi(ab) \quad = \quad \phi(\bar{1}\cdot\bar{1}) \quad = \quad \phi(\bar{1}) \quad = \quad 1 \quad = \quad 1\cdot 1 \quad = \quad \phi(\bar{1})\phi(\bar{1}) \quad = \quad \phi(a)\phi(b).$$