Aufgabe F15T3A2 (12 Punkte)

Seien p, q, r Primzahlen mit $p < q < r$ und $pq < r + 1$. Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung pqr auflösbar ist.

Lösung:

Sei G eine Gruppe der Ordnung pqr, und seien ν_p, ν_q bzw. ν_r die Anzahlen der p-, q- und r-Sylowgruppen. Auf Grund der Sylowsätze gilt $\nu_r \mid (pq)$, also $\nu_r \in \{1, p, q, pq\}$, und außerdem $\nu_r \equiv 1 \mod r$. Wegen $p < q < pq < r + 1$ gilt $pq \not\equiv 1 \mod r$ und ebenso $p, q \not\equiv 1 \mod r$. Somit ist $\nu_r = 1$, und die einzige r-Sylowgruppe von G, die wir mit N bezeichnen, ist ein Normalteiler von G.

Laut Vorlesung ist G genau dann auflösbar, wenn sowohl N als auch die Faktorgruppe $\bar{G} = G/N$ auflösbar sind. Da $|G| = pqr$ von der Primzahl r nur einfach geteilt wird, gilt $|N| = r$ und

$$|\bar{G}| \quad = \quad (G : N) \quad = \quad \frac{|G|}{|N|} \quad = \quad \frac{pqr}{r} \quad = \quad pq.$$

Als Gruppe von Primzahlordnung ist N zyklisch, damit auch abelsch und erst recht auflösbar. Um die Auflösbarkeit von $\bar{G}$ nachzuweisen, betrachten wir die Anzahlen $\bar{\nu}_p, \bar{\nu}_q$ der p- bzw. q-Sylowgruppen von $\bar{G}$. Durch Anwendung der Sylowsätze auf $\bar{G}$ erhalten wir $\bar{\nu}_q \mid p$, also $\bar{\nu}_q \in \{1, p\}$, und außerdem $\bar{\nu}_q \equiv 1 \mod q$. Wegen $p < q$ ist $p \equiv 1 \mod q$ ausgeschlossen. Also muss $\bar{\nu}_q = 1$ gelten. Bezeichnen wir die einzige q-Sylowgruppe von $\bar{G}$ mit $\bar{S}$, dann gilt wiederum $\bar{S} \trianglelefteq \bar{G}$.

Die Gruppe $\bar{G}$ ist genau dann auflösbar, wenn sowohl $\bar{S}$ also auch die Faktorgruppe $\bar{G}/\bar{S}$ auflösbar sind. Da $|\bar{G}| = pq$ von der Primzahl q nur einfach geteilt wird, gilt $|\bar{S}| = q$ und

$$|\bar{G}/\bar{S}| \quad = \quad (\bar{G} : \bar{S}) \quad = \quad \frac{|\bar{G}|}{|\bar{S}|} \quad = \quad \frac{pq}{q} \quad = \quad p.$$

Als Gruppen von Primzahlordnung sind $\bar{S}$ und $\bar{G}/\bar{S}$ zyklisch und damit auflösbar. Wie oben bemerkt folgt daraus, dass auch $\bar{G}$ und G auflösbar sind.