Aufgabe F15T2A5 (10 Punkte)

Sei p eine Primzahl und $q = p^n$, $n > 0$. Weiter sei K ein Körper der Charakteristik p. Zeigen Sie, dass die Nullstellen des Polynoms $f = x^q - x$ einen Unterkörper von K bilden.

Lösung:

Sei $N = \{\alpha \in K \mid f(\alpha) = 0\}$. Um zu zeigen, dass N ein Unterkörper von K ist, müssen folgende Aussagen überprüft werden.

(i) $1 \in N$ (ii) $\alpha, \beta \in N \Rightarrow \alpha + \beta, \alpha\beta \in N$ (iii) $\alpha \in N, \alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha^{-1} \in N$

zu (i) Dies folgt direkt aus der Gleichung $f(1) = 1^q - 1 = 1 - 1 = 0$.

zu (ii) Seien $\alpha, \beta \in N$. Dann gilt $\alpha^q - \alpha = f(\alpha) = 0$ und somit $\alpha^q = \alpha$. Ebenso folgt $\beta^q = \beta$ aus $f(\beta) = 0$. Dies wiederum bedeutet $(\alpha\beta)^q = \alpha^q\beta^q = \alpha\beta$, also $f(\alpha\beta) = (\alpha\beta)^q - \alpha\beta = 0$ und somit $\alpha\beta \in N$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass aus $\mathrm{char}(K) = p$ die Gleichung $(\gamma+\delta)^{p^m} = \gamma^{p^m} + \delta^{p^m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und $\gamma, \delta \in K$ folgt. Insbesondere gilt also $(\alpha + \beta)^q = \alpha^q + \beta^q$ und somit

$$f(\alpha + \beta) \quad = \quad (\alpha + \beta)^q - (\alpha + \beta) \quad = \quad \alpha^q + \beta^q - \alpha - \beta \quad =$$

$$(\alpha^q - \alpha) + (\beta^q - \beta) \quad = \quad 0 + 0 \quad = \quad 0$$

und somit $\alpha + \beta \in N$.

zu (iii) Sei $\alpha \in N \setminus \{0\}$. Dann gilt $\alpha^q = \alpha$. Es folgt $(\alpha^{-1})^q = \alpha^{-q} = (\alpha^q)^{-1} = \alpha^{-1}$ und somit $f(\alpha^{-1}) = (\alpha^{-1})^q - \alpha^{-1} = \alpha^{-1} - \alpha^{-1} = 0$.