Aufgabe F15T2A4 (8+10 Punkte)

(a) Die Gruppe G operiere transitiv auf einer Menge Ω mit $|\Omega| > 1$. Man zeige: Hat jedes Element aus G mindestens einen Fixpunkt, dann ist G eine Vereinigung der Konjugierten hUh^{-1}, $h \in G$, einer echten Untergruppe U von G.

(b) Für $n > 1$ sei $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ die Gruppe der invertierbaren $n \times n$-Matrizen über den komplexen Zahlen. Man gebe eine echte Untergruppe U von G an, so dass G die Vereinigung der Konjugierten von U ist.
Hinweis: Betrachte die Operation von G auf den 1-dimensionalen Unterräumen von $\mathbb{C}^n$.

Lösung:

zu (a) Sei $a \in \Omega$ beliebig und $U = G_a$. Zunächst stellen wir fest, dass $U \subsetneq G$ gilt. Wäre nämlich $G_a = G$, dann würde daraus $g \cdot a = a$ für alle $g \in G$ folgen. Es wäre also $G(a) = \{a\}$, somit $|G(a)| = 1$ und $G(a) \subsetneq \Omega$ wegen $|\Omega| > 1$, was der Transitivität der Gruppenoperation widerspricht. Nun beweisen wir die Gleichung

$$G \quad = \quad \bigcup_{h \in G} hUh^{-1}.$$

Die Inklusion „$\supseteq$“ ist nach Definition offensichtlich. Zum Beweis von „$\subseteq$“ sei $g \in G$ vorgegeben. Weil jedes Element von G nach Voraussetzung einen Fixpunkt besitzt, gilt $g \cdot b = b$ für ein $b \in \Omega$. Auf Grund der Transitivität der Gruppenoperation existiert außerdem ein $h \in G$ mit $h \cdot a = b$, was zu $h^{-1} \cdot b = h^{-1} \cdot (h \cdot a) = (h^{-1}h) \cdot a = e \cdot a = a$ äquivalent ist. Setzen wir $u = h^{-1}gh$, dann gilt

$$(h^{-1}gh) \cdot a \quad = \quad h^{-1} \cdot (g \cdot (h \cdot a)) \quad = \quad h^{-1} \cdot (g \cdot b) \quad = \quad h^{-1} \cdot b \quad = \quad a.$$

Dies zeigt, dass u in $G_a = U$ enthalten ist, und es folgt $g = hgh^{-1} \in hUh^{-1}$.

zu (b) Sei $\mathcal{U}$ die Menge der eindimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{C}^n$ und U der Stabilisator des Untervektorraums $\langle e_1 \rangle$, also

$$U \quad = \quad \{g \in G \mid g\langle e_1 \rangle = \langle e_1 \rangle\}.$$

Wenn wir zeigen können, dass jedes Element $g \in G$ mindestens einen Fixpunkt besitzt, dann folgt daraus nach Teil (a), dass U die gewünschte Eigenschaft hat. Weil $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, besitzt das charakteristische Polynom $\chi_g \in \mathbb{C}[x]$ von g eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$. Dabei handelt es sich um einen Eigenwert von g, es existiert also ein $v \in \mathbb{C}^n$ mit $v \neq 0$ und $gv = \lambda v \in \langle v \rangle$. Weil g invertierbar ist, folgt aus $g\langle v \rangle \subseteq \langle v \rangle$ auch $g\langle v \rangle = \langle v \rangle$. Also ist $\langle v \rangle \in \mathcal{U}$ ein Fixpunkt von g.