Aufgabe F15T2A2 (10 Punkte)

Es ein $f \in K[x]$ ein nicht konstantes Polynom ohne mehrfache Nullstelllen in einem Zerfällungskörper. Man zeige, dass f ein Teiler des Polynoms $f(x+f)$ ist.

Lösung:

Das Polynom $g = f(x+f)$ ist genau dann ein Vielfaches von f, wenn $g+(f)$ im Faktorring $R = K[x]/(f)$ das Nullelement ist. Um das zu zeigen, schreiben wir f in der Form $f = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ mit $n \geq 1$ und $a_0, a_1, ..., a_n \in K$. Auf Grund der Rechenregeln in R gilt nun

$$g + (f) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} a_k (x+f)^k + (f) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} a_k \left((x+f)^k + (f)\right) \quad =$$

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k + (f))(x + f + (f))^k \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} (a_k + (f))(x + (f))^k \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + (f) \quad =$$

$$f + (f) \quad = \quad 0 + (f) \quad = \quad 0_R.$$

(Die Voraussetzung, dass f in keinem Zerfällungskörper mehrfache Nullstellen besitzt, wird nicht benötigt. Ihre Verwendung würde den Beweis nur komplizierter machen.)