Aufgabe F15T2A1 (10 Punkte)

Man bestimme alle Paare von Primzahlen p, q mit $p^2 - 2q^2 = 1$.

Lösung:

Wegen $p^2 = 2q^2 + 1 > q^2$ gilt zunächst $p > q$, insbesondere ist also $p > 2$ und damit eine ungerade Primzahl. Weiter gilt $2q^2 = p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$. Wäre q ungerade, dann wäre $2q^2$ durch 2, aber nicht durch 4 teilbar. Andererseits sind $p \pm 1$ gerade, weil p ungerade ist, somit ist $(p-1)(p+1)$ durch 4 teilbar. Der Widerspruch zeigt, dass q eine gerade Primzahl, also $q = 2$ sein muss. Die einzige Lösung der Gleichung $(p-1)(p+1) = 2q^2 = 8$ ist $p = 3$, denn für $p \geq 5$ wäre die rechte Seite der Gleichung bereits ≥ 24. Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass $p = 3$ und $q = 2$ das einzige Paar Primzahlen ist, welches die Gleichung erfüllt.