Aufgabe F15T1A4 (6+6 Punkte)

Sei J das von $x^3 - 7$ erzeugte Ideal in $\mathbb{Q}[x]$.

(a) Beweisen Sie, dass $\mathbb{Q}[x]/J$ ein Körper ist, und bestimmen Sie den Grad der Körpererweiterung $\mathbb{Q}[x]/J \supset \mathbb{Q}$.

(b) Bestimmen Sie ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[x]$, für das $f + J$ multiplikatives Inverses von $(x^2 + 1) + J$ in $\mathbb{Q}[x]/J$ ist.

Lösung:

zu (a) Nach dem Eisenstein-Kriterium ist $g = x^3 - 7$ in $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel. Da es sich bei $\mathbb{Q}[x]$ um einen Hauptidealring handelt, ist dies gleichbedeutend damit, dass $J = (g)$ in $\mathbb{Q}[x]$ ein maximales Ideal ist. Daraus wiederum folgt, dass $K = \mathbb{Q}[x]/J$ ein Körper ist.

Sei nun $\alpha = x + (g) \in K$, und identifizieren wir $\mathbb{Q}$ mit seinem Bild in K unter der Abbildung $\mathbb{Q} \to K$, $a \mapsto a+(g)$. Dann gilt $\mathbb{Q}(\alpha) = K$. Die Inklusion „$\subseteq$" ist wegen $\alpha \in K$ offensichtlich. Für die Inklusion „$\supseteq$" bemerken wir, dass die Elemente des Körpers K die Form $h + (g) = h(\alpha)$ haben, wobei h die Polynome aus $\mathbb{Q}[x]$ durchläuft. Da $\mathbb{Q}(\alpha)$ als Teilring von K abgeschlossen unter Addition und Multiplikation ist, folgt aus $\mathbb{Q} \cup \{\alpha\} \subseteq \mathbb{Q}(\alpha)$ unmittelbar, dass auch $h(\alpha)$ für jedes $h \in \mathbb{Q}[x]$ in $\mathbb{Q}(\alpha)$ enthalten ist.

Wegen $g(\alpha) = g+(g) = 0+(g) = 0_K$ ist α eine Nullstelle von g, außerdem ist g normiert und irreduzibel über $\mathbb{Q}$. Dies zeigt, dass g das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$ ist, und es folgt $[K : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = \operatorname{grad}(g) = 3$.

zu (b) Wir müssen Polynome $f, h \in \mathbb{Q}[x]$ mit $f \cdot (x^2 + 1) + h \cdot (x^3 - 7) = 1$ finden, denn dann ist das Bild von $f \cdot (x^2 + 1)$ in K gleich

$$(f + J)((x^2 + 1) + J) \quad = \quad f \cdot (x^2 + 1) + J \quad = \quad 1 + J \quad = \quad 1_K$$

und f folglich das multiplikative Inverse von $(x^2 + 1) + J$ in K. Die Polynome f, h erhalten wir, indem wir den Euklidischen Algorithmus auf die Polynome $x^3 - 7$ und $x^2 + 1$ anwenden.

q	a_n	x_n	y_n
$-$	$x^3 - 7$	1	0
$-$	$x^2 + 1$	0	1
x	$-x - 7$	1	$-x$
$-x + 7$	50	$x - 7$	$-x^2 + 7x + 1$

Es gilt also $(x-7)(x^3-7)+(-x^2+7x+1)(x^2+1) = 50 \Leftrightarrow (\frac{1}{50}x-\frac{7}{50})(x^3-7)+(-\frac{1}{50}x^2+\frac{7}{50}x+\frac{1}{50})(x^2+1) = 1$. Die gesuchten Polynome sind also $f = -\frac{1}{50}x^2 + \frac{7}{50}x + \frac{1}{50}$ und $h = \frac{1}{50}x - \frac{7}{50}$, und $(-\frac{1}{50}x^2 + \frac{7}{50}x + \frac{1}{50}) + J$ ist das multiplikative Inverse von $(x^2 + 1) + J$ in K.