Aufgabe F15T1A3 (6+6 Punkte)

Sei G eine Gruppe der Ordnung 105. Zeigen Sie:

(a) G hat einen Normalteiler N mit $\#N = 5$ oder $\#N = 7$.

(b) G ist auflösbar.

Lösung:

zu (a) Die Primfaktorzerlegung der Zahl 105 ist gegeben durch $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. Für jede Primzahl p sei ν_p die Anzahl der p-Sylowgruppen von G. Auf Grund der Sylowsätze gilt $\nu_7 \mid 3 \cdot 5$, also $\nu_7 \in \{1, 3, 5, 15\}$, und außerdem $\nu_7 \equiv 1 \bmod 7$. Wegen $3, 5 \not\equiv 1 \bmod 7$ folgt daraus $\nu_7 \in \{1, 15\}$. Ebenso gilt $\nu_5 \in 3 \cdot 7$, also $\nu_5 \in \{1, 3, 7, 21\}$, und außerdem $\nu_5 \equiv 1 \bmod 5$. Wegen $3 \not\equiv 1 \bmod 5$ und $7 \equiv 2 \not\equiv 1 \bmod 5$ folgt daraus $\nu_5 \in \{1, 21\}$.

Nehmen wir nun an, dass G weder einen Normalteiler der Ordnung 5 noch einen Normalteiler der Ordnung 7 besitzt. Jede 5-Sylowgruppe von G hat die Ordnung 5, denn dies ist die höchste Potenz von 5, welche die Gruppenordnung $|G| = 105$ teilt. Wäre $\nu_5 = 1$, dann wäre auf Grund der Sylowsätze die einzige 5-Sylowgruppe auch ein Normalteiler von G, was aber unserer Annahme widerspricht. Also muss $\nu_5 = 21$ gelten. Genauso liefert unsere Annahme die Gleichung $\nu_7 = 15$.

Jedes Element $g \in G$ der Ordnung 5 liegt in genau einer 5-Sylowgruppe, nämlich die von g erzeugte Untergruppe $\langle g \rangle$. Andererseits ist jede 5-Sylowgruppe als Gruppe von Primzahlordnung zyklisch und enthält somit $\varphi(5) = 4$ Elemente der Ordnung 5. Die Anzahl der Elemente der Ordnung 5 ist also viermal so groß wie die Anzahl der 5-Sylowgruppen. Es gibt also $4\nu_5 = 84$ Elemente der Ordnung 5 in G. Genauso kommt man zu dem Ergebnis, dass G genau $6\nu_7 = 90$ Elemente der Ordnung 7 enthält. Insgesamt würde G also mindestens $84 + 90 = 174$ Elemente enthalten, was $|G| = 105$ widerspricht. Also war unsere Annahme falsch, und G enthält einen Normalteiler der Ordnung 5 oder einen Normalteiler der Ordnung 7.

zu (b) Wir setzen folgende Tatsachen über auflösbare Gruppen als bekannt voraus: Jede abelsche Gruppe ist auflösbar. Ist G eine beliebige Gruppe und $N \trianglelefteq G$, so ist G auflösbar genau dann, wenn N und G/N auflösbar sind.

Sei nun G eine Gruppe der Ordnung 105. Nach Teil (a) hat G einen Normalteiler N mit $\sharp N = 5$ oder $\sharp N = 7$. Betrachten wir zunächst den Fall $\sharp N = 5$. Als Gruppe von Primzahlordnung ist N zyklisch, damit auch abelsch und auflösbar. Weiter unten wird gezeigt, dass jede Gruppe der Ordnung 21 auflösbar ist. Wegen

$$\sharp(G/N) \quad = \quad \frac{\sharp G}{\sharp N} \quad = \quad \frac{105}{5} \quad = \quad 21$$

ist also auch G/N auflösbar. Aus der Auflösbarkeit von N und G/N folgt die Auflösbarkeit von G. Setzen wir nun $\sharp N = 7$ voraus. Dann ist N wiederum auflösbar als Gruppe von Primzahlordnung, außerdem gilt $\sharp(G/N) = \frac{105}{7} = 15$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass jede Gruppe der Ordnung 15 zyklisch, und somit ebenfalls auflösbar, ist. (Dies wurde dort mit Hilfe der Sylowsätze gezeigt.) Wiederum folgt die Auflösbarkeit von G aus der Auflösbarkeit von N und G/N.

Es bleibt zu zeigen, dass Gruppen der Ordnung 21 auflösbar sind. Sei also H eine Gruppe der Ordnung 21, und für jede Primzahl p sei μ_p die Anzahl der p-Sylowgruppen von H. Auf Grund der Sylowsätze gilt $\mu_7 \mid 3$, also $\mu_7 \in \{1, 3\}$. Zusammen mit $\mu_7 \equiv 1 \bmod 7$ folgt wegen $3 \not\equiv 1 \bmod 7$ daraus $\mu_7 = 1$. Sei N die einzige 7-Sylowgruppe von H. Dann gilt $|N| = 7$ (weil dies die größte Potenz von 7 ist, die $\sharp H$ teilt). Als Gruppe von Primzahlordnung ist N zyklisch und somit auch auflösbar. Weil es sich bei $\sharp(H/N) = 3$ um eine Primzahl handelt, ist H/N ebenfalls auflösbar. Auf der Auflösbarkeit von N und H/N folgt die Auflösbarkeit von H.