Aufgabe F15T1A2 (4 Punkte)

Sei $m \geq 3$ ein ungerade ganze Zahl. Zeigen Sie die folgende Kongruenz:

$$1^m + 2^m + 3^m + ... + (m-3)^m + (m-2)^m + (m-1)^m \equiv 0 \bmod m$$

Lösung:

Das Problem vereinfacht sich erheblich, wenn man die angegebene Kongruenz als Gleichung im Restklassenring $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ betrachtet. Zu zeigen ist, dass das Bild von $\sum_{k=1}^{m-1} k^m$ in $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ gleich Null ist. In $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ gilt für $1 \leq k \leq \frac{1}{2}(m-1)$ jeweils

$$(\bar{m} - \bar{k})^m \quad = \quad (\bar{0} - \bar{k})^m \quad = \quad (-\bar{1})^m \bar{k}^m \quad = \quad -\bar{k}^m \quad ,$$

weil m ungerade ist. Damit erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{m-1} \bar{k}^m \quad = \quad \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(m-1)} \bar{k}^m + \sum_{k=\frac{1}{2}(m+1)}^{m-1} \bar{k}^m \quad = \quad \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(m-1)} \bar{k}^m + \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(m-1)} (\bar{m} - \bar{k})^m \quad =$$

$$\sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(m-1)} \bar{k}^m + \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(m-1)} (-\bar{k}^m) \quad = \quad \bar{0}$$

wobei im zweiten Schritt die hintere Summe lediglich umparametrisiert (d.h. auf den Index k und die Summationsgrenzen die Transformation $\ell \mapsto m - \ell$ angewendet) wurde.