Aufgabe F15T1A1 (8+8 Punkte)

Sei $\mathbb{F}_2$ der endliche Körper mit genau zwei Elementen 0 und 1. Auf dem dreidimensionalen $\mathbb{F}_2$-Vektorraum $(\mathbb{F}_2)^3$ betrachten wir den Endomorphismus

$$\phi : (\mathbb{F}_2)^3 \longrightarrow (\mathbb{F}_2)^3 \quad , \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_3, x_2, x_1).$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von ϕ. Bestimmen Sie alle Eigenwerte von ϕ in $\mathbb{F}_2$. Bestimmen Sie für jeden Eigenwert von ϕ in $\mathbb{F}_2$ eine Basis des zugehörigen Eigenraums.

(b) Gibt es eine Basis von $(\mathbb{F}_2)^3$, bezüglich derer ϕ eine Jordan'sche Normalform hat? Begründen Sie Ihre Antwort. Wenn ja, bestimmen Sie die Jordan'sche Normalform von ϕ.

Lösung:

zu (a) Seien $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ und $e_3 = (0,0,1)$ die Einheitsvektoren in $V = (\mathbb{F}_2)^3$ und $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ die Einheitsbasis. Zunächst bestimmen wir die Darstellungsmatrix $A = \mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\phi)$ von ϕ bezüglich der Basis $\mathcal{E}$. Es gilt $\phi(e_1) = \phi(1,0,0) = (0,0,1)$, $\phi(e_2) = \phi(0,1,0) = (0,1,0)$ und $\phi(e_3) = \phi(0,0,1) = (1,0,0)$. Jede Gleichung liefert eine Spalte der Darstellungsmatrix, insgesamt gilt also

$$A \quad = \quad \mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\phi) \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom $f \in \mathbb{F}_2[x]$ von ϕ ist zugleich das charakteristische Polynom der Matrix A und gegeben durch

$$f \quad = \quad \det(x\mathbb{E}_3 - A) \quad = \quad \det \begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & x+1 & 0 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix} \quad = \quad x^2(x+1) - (x+1) \quad =$$

$$x^3 + x^2 - x + 1 \quad = \quad x^3 + x^2 + x + 1$$

wobei $\mathbb{E}_3$ die 3×3-Einheitsmatrix bezeichnet und zu beachten ist, dass im Körper $\mathbb{F}_2$ die Gleichung $-1 = 1$ gilt. Es gilt $f(0) = 1 \neq 0$ und $f(1) = 0$. Also ist 1 die einzige Nullstelle des charakteristischen Polynoms von ϕ in $\mathbb{F}_2$, und folglich ist 1 der einzige Eigenwert. Wir berechnen $\mathrm{Eig}(\phi, 1) = \ker(A - 1 \cdot \mathbb{E}_3)$ mit Hilfe des Gaußverfahrens, indem wir die Matrix $A - 1 \cdot \mathbb{E}_3$ auf normierte Zeilenstufenform bringen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

An der normierten Zeilenstufenform (genauer: deren 2. und 3. Spalte) kann abgelesen werden, dass

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von $\mathrm{Eig}(\phi, 1)$ ist.

zu (b) Die formalen Ableitungen von f sind gegeben durch $f' = 3x^2 + 2x + 1 = x^2 + 1$ und $f'' = 2x = 0$. Wegen $f(1) = f'(1) = f''(1) = 0$ ist 1 eine dreifache Nullstelle von f, es gilt also $f = (x-1)^3$. (Dasselbe Ergebnis erhält man natürlich auch durch wiederholte Polynomdivision.) Das charakteristische Polynom f zerfällt also in $\mathbb{F}_2[x]$ in Linearfaktoren. Daraus folgt laut Vorlesung, dass eine Jordanbasis von V bezüglich ϕ existiert. Weil 1 der einzige Eigenwert ist, setzt sich die Jordansche Normalform aus Jordankästchen zum Eigenwert 1 zusammen. Nach Teil (a) gilt $\dim \mathrm{Eig}(\phi, 1) = 2$, also gibt es genau zwei Jordankästchen. Die Jordansche Normalform ist also gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$