Aufgabe F14T3A4 (5+7+3 Punkte)

Es sei $L \subseteq \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper des Polynoms $x^3 - \pi$ über dem Grundkörper $K = \mathbb{Q}(\pi)$. Sie dürfen im Folgenden verwenden, dass π ein über $\mathbb{Q}$ transzendentes Element ist.

(a) Bestimmen Sie den Grad $[L : K]$.

(b) Bestimmen Sie alle Zwischenkörper $K \subseteq F \subseteq L$, indem Sie jeweils ein primitives Element β angeben mit $F = K(\beta)$.

(c) Welche dieser Zwischenkörper sind normale Erweiterungen von K?

Lösung:

zu (a) Die drei komplexen Nullstellen des Polynoms $f = x^3 - \pi$ sind $\sqrt[3]{\pi}$, $\zeta\sqrt[3]{\pi}$ und $\zeta^2\sqrt[3]{\pi}$, mit der primitiven dritten Einheitswurzel $\zeta = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$. Somit ist der Zerfällungskörper durch $L = K(\sqrt[3]{\pi}, \zeta\sqrt[3]{\pi}, \zeta^2\sqrt[3]{\pi})$ gegeben. Um dies zu vereinfachen, beweisen wir die Gleichung

$$L \quad = \quad K(\sqrt[3]{\pi}, \zeta).$$

Aus $\sqrt[3]{\pi}, \zeta \in K(\sqrt[3]{\pi}, \zeta)$ folgt $\sqrt[3]{\pi}, \zeta\sqrt[3]{\pi}, \zeta^2\sqrt[3]{\pi} \in K(\sqrt[3]{\pi}, \zeta)$, daraus folgt die Inklusion „$\subseteq$". Aus $\sqrt[3]{\pi}, \zeta\sqrt[3]{\pi} \in L$ folgt andererseits $\zeta = \frac{\zeta\sqrt[3]{\pi}}{\sqrt[3]{\pi}} \in L$, deshalb gilt auch "$\supseteq$".

Mit Hilfe dieser Darstellung von L können wir nun den Grad $[L : K]$ bestimmen. Das Polynom f ist normiert, und es hat $\sqrt[3]{\pi}$ als Nullstelle. Wir zeigen, dass es außerdem über K irreduzibel ist. Wäre dies nicht der Fall, dann müsste eine Nullstelle von f in K liegen. Wegen $K \subseteq \mathbb{R}$ kann dies nur das Element $\sqrt[3]{\pi}$ sein. Nun gilt

$$\mathbb{Q}(\pi) \quad = \quad \left\{ \frac{u(\pi)}{v(\pi)} \mid u, v \in \mathbb{Q}[x], v \neq 0 \right\}.$$

Nehmen wir $\sqrt[3]{\pi} \in K$ an, dann gibt es also $u, v \in \mathbb{Q}[x]$ mit $v \neq 0$ und $\sqrt[3]{\pi} = \frac{u(\pi)}{v(\pi)}$. Es folgt $\pi v(\pi)^3 = u(\pi)^3$; damit wäre π eine Nullstelle des Polynoms $g = xv^3 - u^3$. Weil die Grade von v^3 und u^3 durch 3 teilbar sind, ist $g \neq 0$. Aber dann widerspricht $g(\pi) = 0$ der Tatsache, dass das Element π über $\mathbb{Q}$ transzendent ist. Also ist f tatsächlich in $K[x]$ irreduzibel, insgesamt das Minimalpolynom von $\sqrt[3]{\pi}$ über K. Wir erhalten $[K(\sqrt[3]{\pi}) : K] = \mathrm{grad}(f) = 3$.

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass ζ eine Nullstelle des dritten Kreisteilungspolynoms $x^2 + x + 1$ ist. Wäre dieses über $K(\sqrt[3]{\pi})$ irreduzibel, dann müsste eine der beiden Nullstellen ζ, ζ^2 in $K(\sqrt[3]{\pi})$ liegen. Aber dies ist wegen $K(\sqrt[3]{\pi}) \subseteq \mathbb{R}$ und $\zeta, \zeta^2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ unmöglich. Also ist $x^2 + x + 1$ das Minimalpolynom von ζ über $K(\sqrt[3]{\pi})$. Wir erhalten $[L : K(\sqrt[3]{\pi})] = [K(\sqrt[3]{\pi}, \zeta) : K(\sqrt[3]{\pi})] = \mathrm{grad}(x^2 + x + 1) = 2$, und mit dem Gradsatz

$$[L : K] \quad = \quad [L : K(\sqrt[3]{\pi})] \cdot [K(\sqrt[3]{\pi}) : K] \quad = \quad 2 \cdot 3 \quad = \quad 6.$$

zu (b) Als Galoisgruppe eines Polynoms vom Grad 3 ist $G = \mathrm{Gal}(f|K) = \mathrm{Gal}(L|K)$ isomorph zu einer Untergruppe von S_3. Außerdem ist $|G| = [L:K] = 6$. Wegen $|S_3| = 6$ ist also G selbst isomorph zur symmetrischen Gruppe S_3. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass S_3 genau 6 Untergruppen besitzt, nämlich jeweils eine von Ordnung 1, 3 und 6, und drei Untergruppen der Ordnung 2. Jeder Untergruppe von S_3 (oder von G) vom Index d entspricht unter der Galois-Korrespondenz auf eineindeutige Weise ein Zwischenkörper M von $L|K$ mit $[M:K] = d$. Daraus folgt, dass $L|K$ genau 6 Zwischenkörper $M_1, ..., M_6$ besitzt, wobei wir nach Umnummerierung

$$[M_1:K] = 1 \quad , \quad [M_2:K] = 2 \quad , \quad [M_3:K] = [M_4:K] = [M_5:K] = 3 \qquad \text{und} \qquad [M_6:K] = 6$$

annehmen können. Da M_1 der kleinste und M_6 der größte Zwischenkörper ist, muss $M_1 = K$ und $M_6 = L$ gelten. Wir haben bereits festgestellt, dass das Kreisteilungspolynom $x^2 + x + 1$ über $K(\sqrt[3]{\pi})$ irreduzibel ist und ζ als Nullstelle besitzt. Damit ist es erst recht irreduzibel über K, und wir erhalten $[K(\zeta):K] = 2$. Also ist $K(\zeta)$ der eindeutig bestimmte Zwischenkörper vom Grad 2 über K, es gilt also $M_2 = K(\zeta)$.

Wie wir oben gesehen haben, ist f irreduzibel über K und hat $\sqrt[3]{\pi}$, $\zeta\sqrt[3]{\pi}$ und $\zeta^2\sqrt[3]{\pi}$ als Nullstellen. Somit sind $K(\sqrt[3]{\pi})$, $K(\zeta\sqrt[3]{\pi})$ und $K(\zeta^2\sqrt[3]{\pi})$ Zwischenkörper von $L|K$ von Grad 3 über K. Wir zeigen, dass diese voneinander verschieden sind. Die Ungleichungen $K(\sqrt[3]{\pi}) \neq K(\zeta\sqrt[3]{\pi})$ und $K(\sqrt[3]{\pi}) \neq K(\zeta^2\sqrt[3]{\pi})$ sind offensichtlich, weil $K(\sqrt[3]{\pi})$ ein Teilkörper von $\mathbb{R}$ ist, die beiden anderen Körper aber nicht. Nehmen wir nun an, es wäre $K(\zeta\sqrt[3]{\pi}) = K(\zeta^2\sqrt[3]{\pi})$. Dann würde $K(\zeta\sqrt[3]{\pi})$ die beiden Elemente $\zeta\sqrt[3]{\pi}$ und $\zeta^2\sqrt[3]{\pi}$ enthalten, somit auch

$$\zeta = \frac{\zeta^2\sqrt[3]{\pi}}{\zeta\sqrt[3]{\pi}} \qquad \text{und} \qquad \sqrt[3]{\pi} = \frac{\zeta\sqrt[3]{\pi}}{\zeta}.$$

Daraus würde dann $K(\zeta\sqrt[3]{\pi}) = L$ folgen, im Widerspruch zu $[K(\zeta\sqrt[3]{\pi}) : K] = 3$ und $[L:K] = 6$. Also haben wir die drei Zwischenkörper von $L|K$ vom Grad 3 über K gefunden: Nach eventuelller Umnummerierung gilt $M_3 = K(\sqrt[3]{\pi})$, $M_4 = K(\zeta\sqrt[3]{\pi})$ und $M_5 = K(\zeta^2\sqrt[3]{\pi})$.

zu (c) Die Erweiterungen $M_1|K$ und $M_2|K$ sind laut Vorlesung normal, weil $[M_1:K] = 1$ und $[M_2:K] = 2$ gilt. Auch die Erweiterung $M_6|K$ ist normal, weil M_6 der Zerfällungskörper des Polynoms f über K ist. Die Körper M_3, M_4, M_5 sind dagegen nicht normal über K. Denn aus der Vorlesung ist bekannt, dass unter der Galois-Korrespondenz die normalen Zwischenkörper den normalen Untergruppen der Galoisgruppe G entsprechen. Die drei Zwischenkörper M_3, M_4, M_5 entsprechen den Untergruppen von G bzw. S_3 der Ordnung 2. Diese Untergruppen sind die verschiedenen 2-Sylowgruppen von S_3 und somit keine Normalteiler von S_3. Denn laut Vorlesung ist eine 2-Sylowgruppe allgemein nur dann Normalteiler einer endlichen Gruppe G, wenn es sich um die einzige 2-Sylowgruppe in G handelt.