Aufgabe F14T3A1 (5+5+5 Punkte)

Wir betrachten die komplexen (2×2)-Matrizen

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Weiter sei $G = \{\pm E, \pm A, \pm B, \pm C\}$.

(a) Zeigen Sie, dass G bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe ist.

(b) Bestimmen Sie alle Untergruppen von G.

(c) Welche Untergruppen sind Normalteiler von G?

Lösung:

zu (a) Wir zeigen, dass G eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ ist. Dazu müssen wir zunächst einmal überprüfen, ob die acht angegebenen Matrizen überhaupt in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ liegen, also invertierbar sind. Dabei wird sich gleichzeitig herausstellen, dass G abgeschlossen unter Inversenbildung ist. Zunächst bemerken wir, dass E, das Neutralelement von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, in G enthalten ist. Die Matrizen E und $-E$ sind offensichtlich invertierbar (wegen $E \cdot E = E$ und $(-E)(-E) = E$) und ihre eigenen Inversen. Weiter gilt

$$A^2 \quad = \quad \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad = \quad -E.$$

Ebenso rechnet man $B^2 = C^2 = -E$ nach, worauf wir hier aus Zeitgründen verzichten. Aus $A^2 = -E$ folgt $A^4 = E$, also $A \cdot A^3 = E$. Damit ist A invertierbar, und das Inverse A^3 ist wegen $A^3 = A^2 \cdot A = (-E)A = -A$ wiederum in G enthalten. Genauso erhält man die Invertierbarkeit von B und C sowie $B^{-1} = -B$ und $C^{-1} = -C$, die ebenfalls in G enthalten sind. Schließlich gilt noch

$$\begin{aligned} (-A)^{-1} \quad &= \quad ((-E)A)^{-1} \quad = \quad A^{-1}(-E)^{-1} \quad = \quad A^{-1}(-E) \\ &= \quad -A^{-1} \quad = \quad -(-A) \quad = \quad A \quad , \end{aligned}$$

und ebenso $(-B)^{-1} = B$ und $(-C)^{-1} = C$. Damit ist die Invertierbarkeit sämtlicher Elemente der Menge G und die Abgeschlossenheit der Menge unter Inversenbildung nachgewiesen.

Um zu zeigen, dass G eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ ist, müssen wir noch überprüfen, dass G unter der Verknüpfung von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, der Matrizenmultiplikation, abgeschlossen ist. Es gilt

$$AB \quad = \quad \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad = \quad C \quad ,$$

und ebenso rechnet man $BC = A$ und $CA = B$ nach. Es folgt $BA = ((BA)^{-1})^{-1} = (A^{-1}B^{-1})^{-1} = ((-A)(-B))^{-1} = (AB)^{-1} = C^{-1} = -C$, und ebenso $CB = -A$ und $AC = -B$. Seien nun $S, T \in G$ beliebig vorgegeben. Ist $S \in \{\pm E\}$, dann folgt $ST \in \{\pm T\}$ und somit $ST \in G$. Ebenso folgt aus $T \in \{\pm E\}$ die Inklusion $ST \in \{\pm S\}$ und ebenfalls $ST \in G$. Setzen wir nun $S, T \notin \{\pm E\}$ voraus. Dann gibt es $\varepsilon, \varepsilon' \in \{\pm E\}$ und $S_1, T_1 \in \{A, B, C\}$ mit $S = \varepsilon S_1$ und $T = \varepsilon' T_1$. Durch unsere vorherige Rechnung ist bereits bekannt, dass $S_1 T_1$ in G liegt. Damit ist auch $ST = \varepsilon\varepsilon' S_1 T_1 \in \{\pm S_1 T_1\}$ in G enthalten.

zu (b) Da es sich bei G um eine Gruppe der Ordnung 8 handelt, kann es in G nur Untergruppen der Ordnungen 1, 2, 4 und 8 geben. Die einzige Untergruppe der Ordnung 1 ist $\{E\}$, und die einzige Untergruppe der Ordnung 8 ist G. Weil es sich bei 2 um eine Primzahl handelt, ist jede Untergruppe der Ordnung 2 zyklisch. Wir haben bereits in Teil (a) festgestellt, dass $A^4 = E$ und $A^2 = -E \neq E$ gilt, ebenso für die Elemente $-A$ und $\pm B$ und $\pm C$. Damit sind die sechs Elemente $\pm A, \pm B, \pm C$ alle von Ordnung 4. Das Neutralelement E hat Ordnung 1, und wegen $-E \neq E$, $(-E)(-E) = E$ ist $-E$ von Ordnung 2. Also ist $\langle -E \rangle = \{\pm E\}$ die einzige Untergruppe der Ordnung 2.

Die sechs Elemente der Ordnung 4 liefern uns wegen

$$\langle A \rangle = \langle -A \rangle = \{\pm E, \pm A\} \quad , \quad \langle B \rangle = \langle -B \rangle = \{\pm E, \pm B\} \quad , \quad \langle C \rangle = \langle -C \rangle = \{\pm E, \pm C\}$$

drei verschiedene Untergruppen der Ordnung 4. Wenn es noch eine weitere Untergruppe U der Ordnung 4 gibt, muss diese nicht-zyklisch sein. Allerdings müsste ein solches U dann drei verschiedene Elemente der Ordnung 2 enthalten. Da in G aber nur ein Element der Ordnung 2 existiert, gibt es in G keine nicht-zyklischen Untergruppen der Ordnung 2.

zu (c) Die triviale Untergruppe $\{E\}$ und die volle Untergruppe G sind stets Normalteiler von G (dies gilt allgemein für alle Gruppen). Aus der Vorlesung ist außerdem bekannt, dass alle Untergruppen vom Index 2 Normalteiler sind. Wegen $\frac{8}{2} = 4$ sind dies genau die Untergruppen der Ordnung 4. Also sind $\langle A \rangle$, $\langle B \rangle$ und $\langle C \rangle$ ebenfalls Normalteiler von G. Wir überprüfen nun, dass auch $\langle -E \rangle$ ein Normalteiler von G ist. Für jedes $S \in G$ gilt $SES^{-1} = SS^{-1} = E \in \langle -E \rangle$ und $S(-E)S^{-1} = -SS^{-1} = -E \in \langle -E \rangle$. Damit ist die Normalteiler-Eigenschaft nachgewiesen. Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass *alle* Untergruppen von G Normalteiler sind.

Hinweis: Die Gruppe G aus der Aufgabe ist also *Quaternionengruppe* bekannt. Es handelt sich um die kleinste nicht-abelsche Untergruppe mit der Eigenschaft, dass alle ihre Untergruppen Normalteiler sind. Die Umkehrung der Implikation „G abelsch $\Rightarrow$ alle Untergruppen Normalteiler“ ist also im Allgemeinen falsch!