Aufgabe F14T2A5 (14 Punkte)

Wir schreiben $C^\infty(\mathbb{R})$ für den Ring (unter punktweiser Addition und Multiplikation) und $\mathbb{R}$-Vektorraum der beliebig oft differenzierbaren reellen Funktionen. Eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ heiße *D-finit*, wenn der von f und allen Ableitungen f', f'', f''', ... erzeugte $\mathbb{R}$-Untervektorraum $D(f)$ von $C^\infty(\mathbb{R})$ endlichdimensional ist. Zeigen Sie, dass die D-finiten Funktionen einen Unterrring von $C^\infty(\mathbb{R})$ bilden.

Lösung:

Die konstante Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$ ist das Einselement im Ring $C^\infty(\mathbb{R})$. Um zu zeigen, dass die D-finiten Funktionen einen Unterring von $C^\infty(\mathbb{R})$ bilden, müssen wir also nachweisen, dass die konstante Einsfunktion D-finit ist und für je zwei D-finite Funktionen $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ auch $f - g$ und fg D-finit sind.

Für die Einsfunktion ist die Aussage offenbar erfüllt, denn alle höheren Ableitungen dieser Funktion sind Null, und somit ist der von der Funktion und ihren Ableitungen erzeugte Untervektorraum von $C^\infty(\mathbb{R})$ eindimensional. Seien nun $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ D-finit. Für jedes $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ bezeichnen wir mit

$$U_h \quad = \quad \langle \{h^{(n)} \mid n \in \mathbb{N}_0\} \rangle_{\mathbb{R}}$$

den von den Ableitungen aufgespannten Untervektorraum. Auf Grund der Voraussetzung werden U_f und U_g bereits von endlich vielen Elementen erzeugt. Es gibt also ein $m \in \mathbb{N}_0$ mit

$$U_f = \langle \{f^{(k)} \mid 0 \le k \le m\} \rangle_{\mathbb{R}} \qquad \text{und} \qquad U_g = \langle \{g^{(k)} \mid 0 \le k \le m\} \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Wegen $f^{(k)} \in U_f$ und $g^{(k)} \in U_g$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gibt es also für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ Koeffizienten $\lambda_{k\ell}, \mu_{k\ell} \in \mathbb{R}$, so dass jeweils

$$f^{(k)} \quad = \quad \sum_{\ell=0}^{m} \lambda_{k\ell} f^{(\ell)} \qquad \text{und} \qquad g^{(k)} \quad = \quad \sum_{\ell=0}^{m} \mu_{k\ell} g^{(\ell)}$$

erfüllt ist. Daraus folgt $(f-g)^{(k)} = f^{(k)} - g^{(k)} = \sum_{\ell=0}^{m} (\lambda_{k\ell} f^{(\ell)} - \mu_{k\ell} g^{(\ell)})$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Die Gleichungen zeigen, dass die Ableitungen von $f - g$ in dem von $\{f^{(k)} \mid 0 \le k \le m\} \cup \{g^{(k)} \mid 0 \le k \le m\}$ erzeugten Untervektorraum liegen. Weil diese Menge endlich ist, handelt es sich bei $f - g$ um ein D-finites Element.

Um die D-Finitheit von fg nachzuweisen, zeigen wir durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$, dass die Ableitung $(fg)^{(n)}$ in dem Untervektorraum liegt, der von der endlichen Menge

$$S \quad = \quad \{f^{(k)} g^{(\ell)} \mid 0 \le k, \ell \le m\} \qquad \text{erzeugt wird.}$$

Für $n = 0$ ist die Aussage wegen $(fg)^{(0)} = fg = f^{(0)} g^{(0)}$ offensichtlich. Sei nun $n \in \mathbb{N}_0$, und setzen wir die Aussage für dieses n voraus. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es Koeffizienen $\alpha_{k\ell}$ mit

$$(fg)^k \quad = \quad \sum_{k=0}^{m} \sum_{\ell=0}^{m} \alpha_{k\ell} f^{(k)} g^{(\ell)}.$$

Daraus folgt

$$(fg)^{(k+1)} \quad = \quad ((fg)^{(k)})' \quad = \quad \sum_{k=0}^{m} \sum_{\ell=0}^{m} \alpha_{k\ell} (f^{(k)} g^{(\ell)})' \quad = \quad \sum_{k=0}^{m} \sum_{\ell=0}^{m} \alpha_{k\ell} (f^{(k)} g^{(\ell+1)} + f^{(k+1)} g^{(\ell)})$$

$$= \quad \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{\ell=0}^{m-1} \alpha_{k\ell} (f^{(k)} g^{(\ell+1)} + f^{(k+1)} g^{(\ell)}) + \alpha_{m-1,m} (f^{(m-1)} g^{(m+1)} + f^{(m)} g^{(m)})$$

$$+ \alpha_{m,m-1} (f^{(m)} g^{(m)} + f^{(m+1)} g^{(m-1)}) + \alpha_{m,m} (f^{(m)} g^{(m+1)} + f^{(m+1)} g^{(m)}).$$

Die Doppelsumme am Ende der Rechnung ist offenbar in $\langle S\rangle_{\mathbb{R}}$ enthalten, denn alle Summanden sind skalare Vielfache von $f^{(k)}g^{(\ell)}$ mit $0 \leq k, \ell \leq m$. Es bleibt also zu zeigen, dass auch die letzten drei Terme in $\langle S\rangle_{\mathbb{R}}$ liegen. Dies folgt aber unmittelbar aus den Gleichungen

$$f^{(m+1)} \quad = \quad \sum_{\ell=0}^{m} \lambda_{m+1,\ell} f^{(\ell)} \qquad \text{und} \qquad g^{(m+1)} \quad = \quad \sum_{\ell=0}^{m} \mu_{m+1,\ell} g^{(\ell)}$$

mit den oben definieren Koeffizienten $\lambda_{m+1,\ell}$ und $\mu_{m+1,\ell}$.