Aufgabe F14T2A3 (4+4+6 Punkte)

Sei G eine Gruppe. Für $h \in G$ definieren wir den Gruppenhomomorphismus

$$\phi_h : G \longrightarrow G \quad , \quad g \mapsto hgh^{-1}.$$

Die Automorphismen ϕ_h mit $h \in G$ nennt man *innere Automorphismen* von G. Wir definieren

$$\mathrm{Inn}(G) \quad = \quad \{\phi_h \mid h \in G\} \subseteq \mathrm{Aut}(G)$$

und das Zentrum von G,

$$Z(G) \quad = \quad \{x \in G \mid xy = yx \text{ für alle } y \in G\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Inn}(G)$ ein Normalteiler in $\mathrm{Aut}(G)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\phi : G \longrightarrow \mathrm{Inn}(G) \quad , \quad h \mapsto \phi_h$$

einen Gruppenisomorphismus $G/Z(G) \to \mathrm{Inn}(G)$ induziert.

(c) Beschreiben Sie alle Automorphismen der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ mit sieben Elementen und begründen Sie, weshalb in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ nur die Identität ein innerer Automorphismus ist.

Lösung:

zu (a) Zunächst überprüfen wir, dass $\mathrm{Inn}(G)$ eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(G)$ ist. Das Neutralelement von $\mathrm{Aut}(G)$ ist die Identitätsabbildung id_G. Zu zeigen ist, dass $\mathrm{id}_G \in \mathrm{Inn}(G)$ gilt, und das mit $\tau_1, \tau_2 \in \mathrm{Inn}(G)$ auch $\tau_1 \circ \tau_2$ in $\mathrm{Inn}(G)$ liegt. Für jedes $g \in G$ gilt mit dem Neutralelement e von G die Gleichung

$$\mathrm{id}_G(g) \quad = \quad ege^{-1} \quad = \quad \phi_e(g).$$

Es folgt $\mathrm{id}_G = \phi_e \in \mathrm{Inn}(G)$. Wegen $\tau_1, \tau_2 \in \mathrm{Inn}(G)$ gibt es Gruppenelemente $h_1, h_2 \in G$ mit $\tau_1 = \phi_{h_1}$ und $\tau_2 = \phi_{h_2}$. Für jedes $g \in G$ gilt

$$(\tau_1 \circ \tau_2)(g) \quad = \quad (\phi_{h_1} \circ \phi_{h_2})(g) \quad = \quad \phi_{h_1}(\phi_{h_2}(g)) \quad = \quad \phi_{h_1}(h_2 g h_2^{-1}) \quad = \quad h_1 h_2 g h_2^{-1} h_1^{-1}$$

$$= \quad (h_1 h_2) g (h_1 h_2)^{-1} \quad = \quad \phi_{h_1 h_2}(g).$$

Daraus folgt $\tau_1 \circ \tau_2 = \phi_{h_1 h_2} \in \mathrm{Inn}(G)$.

Nun beweisen wir die Normalteilereigenschaft. Seien $\tau \in \mathrm{Aut}(G)$ und $\sigma \in \mathrm{Inn}(G)$ vorgegeben. Zu zeigen ist $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} \in \mathrm{Inn}(G)$. Wegen $\sigma \in \mathrm{Inn}(G)$ ist $\sigma = \phi_h$ für ein $h \in G$. Für jedes $g \in G$ gilt

$$(\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1})(g) \quad = \quad (\tau \circ \phi_h \circ \tau^{-1})(g) \quad = \quad (\tau \circ \phi_h)(\tau^{-1}(g)) \quad = \quad \tau(h\tau^{-1}(g)h^{-1})$$

$$= \quad \tau(h)\tau(\tau^{-1}(g))\tau(h^{-1}) \quad = \quad \tau(h) g \tau(h)^{-1} \quad = \quad \phi_{\tau(h)}(g)$$

also ist $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} = \phi_{\tau(h)} \in \mathrm{Inn}(G)$ erfüllt.

zu (b) Wir beweisen den Isomorphismus, indem wir den Homomorphiesatz auf den Homomorphismus ϕ anwenden. Dafür müssen wir überprüfen, dass ϕ surjektiv ist, und dass $Z(G)$ der Kern von ϕ ist. Ersteres folgt unmittelbar aus der Definition von $\mathrm{Inn}(G)$, denn für jedes $\tau \in \mathrm{Inn}(G)$ gibt es ein $h \in G$ mit $\phi(h) = \phi_h = \tau$. Für den Beweis der zweiten Aussage sei $h \in G$ vorgegeben. Es gilt dann die Äquivalenz

$$h \in \ker(\phi) \quad \Leftrightarrow \quad \phi(h) = \mathrm{id}_G \quad \Leftrightarrow \quad \phi_h = \mathrm{id}_G \quad \Leftrightarrow \quad \phi_h(g) = g \ \forall\ g \in G \quad \Leftrightarrow$$

$$hgh^{-1} = g \ \forall\ g \in G \quad \Leftrightarrow \quad hg = gh \ \forall\ g \in G.$$

Daraus folgt $\ker(\phi) = Z(G)$. Insgesamt liefert der Homomorphiesatz nun $G/Z(G) = G/\ker(\phi) \cong \mathrm{im}(\phi) = \mathrm{Inn}(G)$.

zu (c) Aus der Vorlesung ist bekannt: Ist G eine zyklische Gruppe, g ein erzeugendes Element, H eine beliebige Gruppe, $h \in H$ und ist $\mathrm{ord}(g) = \infty$ oder ein Vielfaches von $\mathrm{ord}(h)$, dann gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\tau : G \to H$ mit $\tau(g) = h$. Ist umgekehrt $\tau : G \to H$ ein Homomorphismus, dann ist $\mathrm{ord}(\tau(g))$ im Fall $\mathrm{ord}(g) < \infty$ ein Teile von $\mathrm{ord}(g)$. Dies wenden wir nun auf $G = H = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ und $g = \bar{1}$ an.

Wegen $|H| = 7$ sind die Ordnungen sämtlicher Elemente Teiler von 7. Es gibt also für jedes $\bar{a} \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ einen eindeutig bestimmten Endomorphismus $\tau_{\bar{a}} : \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ mit $\tau_{\bar{a}}(\bar{1}) = \bar{a}$. Dabei handelt es sich genau dann um einen Automorphismus, wenn $\bar{a} \neq \bar{0}$ ist. Ist nämlich $\bar{a} \neq \bar{0}$, dann gilt $\mathrm{ord}(\bar{a}) = 7$ und $\langle \bar{a} \rangle = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Weil das Bild $\tau_{\bar{a}}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ ist, die mit $\tau_{\bar{a}}(\bar{1}) = \bar{a}$ auch $\langle \bar{a} \rangle$ enthält, folgt daraus die Surjektivität von $\tau_{\bar{a}}$. Als surjektive Abbildung zwischen zwei endlichen, gleichmächtigen Mengen ist $\tau_{\bar{a}}$ auch bijektiv, insgesamt also ein Automorphismus.

Im Fall $\bar{a} = 0$ dagegen gilt $\tau_{\bar{0}}(\bar{1}) = \bar{0}$ und somit $\tau_{\bar{0}}(\bar{c}) = \tau_{\bar{0}}(c \cdot \bar{1}) = c \cdot \tau_{\bar{0}}(\bar{1}) = c \cdot \bar{0} = \bar{0}$ für alle $c \in \mathbb{Z}$. Das Bild von $\tau_{\bar{0}}$ ist also die triviale Untergruppe $\{\bar{0}\}$ von $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, und damit ist $\tau_{\bar{0}}$ kein Automorphismus. Insgesamt besteht $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ also aus den sechs Elementen $\tau_{\bar{1}}, \tau_{\bar{2}}, ..., \tau_{\bar{6}}$, wobei $\tau_{\bar{1}} = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}}$ ist (denn die Identität ist der eindeutig bestimmte Automorphismus, der $\bar{1}$ auf $\bar{1}$ abbildet.)

Sei nun τ ein innerer Automorphismus von $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, also $\tau = \phi_{\bar{a}}$ für ein $\bar{a} \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Für jedes $\bar{c} \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ gilt dann

$$\tau(\bar{c}) \quad = \quad \phi_{\bar{a}}(\bar{c}) \quad = \quad \bar{c} + \bar{a} + (-\bar{c}) \quad = \quad \bar{a} \quad = \quad \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}}(\bar{a}).$$

Daraus folgt $\tau = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}}$. (Dabei ist zu beachten, dass die Verknüpfung in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ die Addition ist. Deshalb steht an Stelle von $\bar{c}\bar{a}\bar{c}^{-1}$ hier der Ausdruck $\bar{c}+\bar{a}+(-\bar{c})$. Eine analoge Rechnung zeigt, dass *jede* abelsche Gruppe als einzigen inneren Automorphismus die Identität besitzt.)