Aufgabe F14T2A2 (8 Punkte)

In einem kommutativen Ring R sei $r \in R$ die Summe zweier Quadrate, also $r = a^2 + b^2$ für geeignete $a, b \in R$. Zeigen Sie, dass dann auch $2r$ eine Summe zweier Quadrate ist.

Lösung:

Wir beweisen die Aussage zunächst für den Ring $R = \mathbb{Z}[i]$ der Gaußschen Zahlen. Es gilt $r = (a+ib)(a-ib)$ und $2 = (1+i)(1-i)$. Damit erhält man

$$\begin{aligned} 2r &= (1+i)(a+ib)(1-i)(a-ib) = (a-b+i(a+b))(a-b-i(a+b)) \\ &= (a-b)^2 + (a+b)^2. \end{aligned}$$

Man überprüft nun unmittelbar, dass diese Gleichung auch über beliebigen kommutativen Ringen R gültig ist: Sind $a, b \in R$ und ist $r = a^2 + b^2$, dann folgt

$$(a-b)^2 + (a+b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2) = 2a^2 + 2b^2 = 2r.$$

(Allerdings ist es nicht so einfach, auf diese Gleichung zu kommen, ohne den Umweg über $\mathbb{Z}[i]$ zu nehmen.)