Aufgabe F14T1A5 (6+8 Punkte)

Es seien p eine Primzahl, $\mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elementen und $\mathbb{F}_p(t)$ der Quotientenkörper des Polynomrings $\mathbb{F}_p[t]$. Wie üblich sei $\mathbb{F}_p(t^p)$ der kleinste Teilkörper von $\mathbb{F}_p(t)$, der t^p enthält.

(a) Zeigen Sie, dass das Polynom $x^p - t^p \in \mathbb{F}_p(t^p)[x]$ irreduzibel ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Körpererweiterung $\mathbb{F}_p(t) \supseteq \mathbb{F}_p(t^p)$ endlich und normal, aber nicht separabel ist.

Lösung:

zu (a) Über dem Körper $L = \mathbb{F}_p(t)$ zerfällt das Polynom $f = x^p - t^p$ in das Produkt $(x-t)^p$. Sei nun $f = gh$ eine beliebige Zerlegung von f in nicht-konstante Polynome g, h über dem Körper $K = \mathbb{F}_p(t^p)[x]$. Ist $c \in K^\times$ der Leitkoeffizient von g, dann muss c^{-1} der Leitkoeffizient von h sein, denn das Polynom $f = gh$ ist normiert. Nach Ersetzung von g durch $c^{-1}g$ und h durch ch können wir annehmen, dass g und h beide normiert sind. Auf Grund der Produktdarstellung $f = (x-t)^p$ müssen g und h dann beides Potenzen des Linearfaktors $x - t$ sein. Es gibt also ein $m \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq m < p$, so dass $g = (x-t)^m$ und $h = (x-t)^{p-m}$ gilt. Der konstante Term von g ist dann $d = (-1)^m t^m$.

Wir zeigen nun, dass d kein Element des Körpers K ist und führen somit die Annahme der Zerlegbarkeit von f zu einem Widerspruch. Nach Definition gilt

$$K \quad = \quad \left\{ \frac{u(t^p)}{v(t^p)} \mid u, v \in \mathbb{F}_p[x] \right\}.$$

Insbesondere gibt es also $u, v \in \mathbb{F}_p[x]$, so dass d in der Form $(-1)^m t^m = d = \frac{u(t^p)}{v(t^p)}$ dargestellt werden kann. Es gilt also $(-1)^m t^m v(t^p) = u(t^p)$. Aber eine solche Gleichung in $\mathbb{F}_p[t]$ ist unmöglich, denn der Grad des Polynoms rechts ist durch p teilbar, der Grad des Polynoms links aber nicht.

zu (b) Es gilt $L = \mathbb{F}_p(t) = \mathbb{F}_p(t^p)(t) = K(t)$, und t ist eine Nullstelle des Polynoms $f \in K[x]$ aus Teil (a). Daraus folgt, dass die Erweiterung $L|K$ endlich ist, vom Grad $[L : K] = \mathrm{grad}(f) = p$. Da das Polynom f über L in Linearfaktoren zerfällt und L über K zugleich von der einzigen Nullstelle t des Polynoms f erzeugt wird, handelt es sich bei L um den Zerfällungskörper des Polynoms f über K. Daraus folgt, dass die Erweiterung $L|K$ normal ist.

Das Polynom $f \in K[x]$ ist das Minimalpolynom von t über K, denn es ist normiert, nach Teil (a) irreduzibel über K, und es besitzt t wegen $f(t) = t^p - t^p = 0$ als Nullstelle. Wegen $f' = px^{p-1} = 0$ und $\mathrm{ggT}(f, f') = \mathrm{ggT}(f, 0) = f$ ist $\mathrm{ggT}(f, f') \neq 1$ und das Polynom f somit nicht separabel. Daraus folgt, dass das Element $t \in L$ nicht separabel über K ist. Dies wiederum bedeutet, dann $L|K$ keine separable Erweiterung ist.