Aufgabe F14T1A4 (3+5+4 Punkte)

Es seien A, B komplexe $(n \times n)$-Matrizen mit $AB = BA$.

(a) Man zeige, dass B jeden Eigenraum von A invariant lässt, d.h.:
Für jeden Eigenraum U von A gilt $Bu \in U$ für alle $u \in U$.

(b) Man zeige, dass A und B einen gemeinsamen Eigenvektor haben, d.h.:
Es gibt $0 \neq v \in \mathbb{C}^n$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ mit $Av = \lambda v$, $Bv = \mu v$.

(c) Man zeige anhand eines Beispiels, dass die Aussage aus (b) ohne die Voraussetzung $AB = BA$ im Allgemeinen nicht gilt.

Lösung:

zu (a) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $U \subseteq \mathbb{C}^n$ der Eigenraum von A zum Wert λ. Für alle $u \in U$ gilt dann $A(Bu) = (AB)u = (BA)u = B(Au) = B(\lambda u) = \lambda(Bu)$. Dies zeigt, dass auch Bu im Eigenraum von A zum Eigenwert λ enthalten ist, es gilt also $Bu \in U$.

zu (b) Das charakteristische Polynom $\chi_A \in \mathbb{C}[x]$ zerfällt in Linearfaktoren, da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist. Daraus folgt, dass A mindestens einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ besitzt. Sei $U = \mathrm{Eig}(A, \lambda)$ der zugehörige Eigenraum. Da U nach Teil (a) invariant unter B ist, erhält man durch Einschränkung der linearen Abbildung $v \mapsto Bv$ auf U einen Endomorphismus ϕ von U. Auch dessen charakteristisches Polynom χ_ϕ liegt in $\mathbb{C}[x]$ und zerfällt folglich in Linearfaktoren. Also besitzt auch ϕ mindestens einen Eigenwert $\mu \in \mathbb{C}$. Bezeichnet $0 \neq v \in U$ einen zugehörigen Eigenvektor, dann gilt $Av = \lambda v$ und $Bv = \phi(v) = \mu v$.

zu (c) Hier genügt es, beliebige Matrizen anzugeben, deren Eigenräume „schief" zueinander liegen. Betrachten wir beispielsweise die 2×2-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Offenbar sind ± 1 die beiden Eigenwerte von A. Es gibt also zwei eindimensionale Eigenräume, und wie man unmittelbar überprüft, werden diese von e_1 bzw. e_2 aufgespannt. Die Menge der Eigenvektoren von A ist damit gegeben durch

$$\{\alpha e_1 \mid \alpha \in \mathbb{C}^\times\} \quad \cup \quad \{\beta e_2 \mid \beta \in \mathbb{C}^\times\}.$$

Aber keiner dieser Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix B. Für jedes $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ gilt nämlich

$$B\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha \end{pmatrix} ,$$

und dieser Vektor ist kein sklares Vielfaches von $(0, \alpha)$. Ebenso folgt aus

$$B\begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

dass keiner der Vektoren $(0, \beta)$ mit $\beta \in \mathbb{C}^\times$ ein Eigenvektor von B ist.