**Aufgabe F14T1A2** (10 Punkte)

Es sei $L \supseteq K$ eine endliche Galoiserweiterung. Zeigen Sie, dass für $\alpha \in L$ folgende Aussagen äquivalent sind.

(a) Es gilt $L = K(\alpha)$.

(b) Für alle $g \in \mathrm{Gal}(L|K)$ mit $g \neq \mathrm{id}_L$ gilt $g(\alpha) \neq \alpha$.

*Lösung:*

„(a) $\Rightarrow$ (b)“ Sei $g \in \mathrm{Gal}(L|K) \setminus \{\mathrm{id}_L\}$ vorgegeben. Wäre $g(\alpha) = \alpha$, dann würde daraus $g = \mathrm{id}_L$ folgen, denn wegen $L = K(\alpha)$ ist jeder $K$-Automorphismus von $L$ durch das Bild von $\alpha$ eindeutig festgelegt. So aber gilt $g(\alpha) \neq \alpha$.

„(b) $\Rightarrow$ (a)“ Nach dem Hauptsatz der Galoistheorie existiert eine bijektive Korrespondenz zwischen den Untergruppen von $\mathrm{Gal}(L|K)$ einerseits und den Zwischenkörpern von $L|K$ andererseits. Dabei ist $U = \mathrm{Gal}(L|K(\alpha))$ die zum Zwischenkörper $K(\alpha)$ korrespondierende Untergruppe. Sei nun $g \in U$ ein beliebiges Element. Nach Definition von $U$ gilt dann $g(\beta) = \beta$ für alle $\beta \in K(\alpha)$, insbesondere auch $g(\alpha) = \alpha$. Aber auf Grund unserer Voraussetzung folgt daraus $g = \mathrm{id}_L$. Wir haben damit $U = \{\mathrm{id}_L\}$ nachgewiesen, und nach dem Hauptsatz der Galoistheorie ist der dazu korrespondierende Zwischenkörper der Körper $L$. Weil $K(\alpha)$ und $L$ beide zur Untergruppe $U$ korrespondieren, und weil die Korrespondenz bijektiv ist, erhalten wir $L = K(\alpha)$.