Aufgabe F14T1A1 (12 Punkte)

Es sei G eine Gruppe der Ordnung 168, die genau 5 Untergruppen der Ordnung 42 hat. Zeigen Sie, dass G nicht einfach ist.

Lösung:

Sei $\mathcal{X}$ die Menge der Untergruppen der Ordnung 42 von G. Laut Vorlesung operiert die Gruppe G auf der Menge der Untergruppen einer festen Ordnung (hier: 42) durch Konjugation. Diese Operation wiederum liefert einen Homomorphismus $\phi : G \to \mathrm{Per}(\mathcal{X})$, der in unserem Fall jedem $g \in G$ die Permutation $\iota_g : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $U \mapsto gUg^{-1}$ zuordnet. Der Kern $N = \ker(\phi)$ ist ein Normalteiler von G. Gilt $N \neq \{e\}, G$, dann ist G keine einfache Gruppe, und wir sind fertig.

Wäre $N = \{e\}$, dann wäre ϕ ein Monomorphismus. Wegen $\phi(G) \subseteq \mathrm{Per}(\mathcal{X})$ würde dann $|G| = |\phi(G)| \leq |\mathrm{Per}(\mathcal{X})|$ folgen. Wegen $|\mathcal{X}| = 5$ ist aber $\mathrm{Per}(\mathcal{X}) \cong S_5$ und $|\mathrm{Per}(\mathcal{X})| = |S_5| = 5! = 120$, und es gilt $|G| = 168 > 120$. Also bleibt als einzige Möglichkeit nur noch $N = G$, was nach Definition des Kerns $\iota_g = \phi(g) = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}$ für alle $g \in G$ bedeutet. Sei $U \in \mathcal{X}$ eine beliebig gewählte Untergruppe der Ordnung 42. Für alle $g \in G$ gilt

$$gUg^{-1} \quad = \quad \iota_g(U) \quad = \quad \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(U) \quad = \quad U.$$

Somit ist U ein Normalteiler von G, und wegen $1 < |U| < |G|$ gilt $U \neq \{e\}, G$.