Aufgabe F13T3A3 (Punkte)

Beweisen Sie, dass jeder endliche Integritätsbereich ein Körper ist.
Hinweis: Man betrachte eine durch Multiplikation gegebene Abbildung.

Lösung:

Sei R ein Integritätsbereich und $a \in R$, $a \neq 0_R$. Wir betrachten die Abbildung $\phi_a : R \to R, x \mapsto ax$. Die Abbildung ϕ_a ist injektiv, denn für alle $x, y \in R$ mit $\phi_a(x) = \phi_a(y)$ erhalten wir $ax = ay$ und $x = y$ auf Grund der Kürzungsregel in Integritätsbereichen.

Weil die Menge R endlich ist, ist ϕ_a als injektive Abbildung $\phi_a : R \to R$ auch surjektiv. Insbesondere gibt es ein $x \in R$ mit $\phi_a(x) = 1_R$. Es folgt $ax = 1_R$, also ist a invertierbar. Wir haben somit gezeigt, dass jedes Element ungleich Null in R invertierbar ist. Damit ist R ein Körper.