Aufgabe F13T3A2 (6 Punkte)

Seien p und q zwei verschiedene Primzahlen, und seien $\xi \neq 0$, $\eta \neq 0$ Nullteiler im Restklassenring $R = \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

$$\xi\eta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \xi R + \eta R = R.$$

Lösung:

Laut Vorlesung ist jedes Element in einem endlichen Ring entweder Einheit oder Nullteiler. Darüber hinaus ist ein Element $a + (pq) \in R$ mit $a \in \mathbb{Z}$ genau dann Einheit, wenn $\mathrm{ggT}(a, pq) = 1$ gilt. Seien $c, d \in \mathbb{Z}$ mit $\xi = c + (pq)$ und $\eta = d + (pq)$. Weil ξ und η Nullteiler und somit keine Einheiten sind, gilt $\mathrm{ggT}(c, pq) > 1$ und $\mathrm{ggT}(d, pq) > 1$. Also ist sowohl c als auch d durch eine der beiden Primzahlen p, q teilbar. Allerdings ist keine der beiden Zahlen durch pq teilbar, denn andernfalls wäre $\xi = \bar{0}$ oder $\eta = \bar{0}$ in $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$.

„$\Rightarrow$“ Sei $\xi\eta = \bar{0}$ vorausgesetzt. Aus $cd + (pq) = (c + (pq))(d + (pq)) = 0 + (pq)$ folgt $cd \in (pq)$. Also ist pq ein Teiler von cd. Auf Grund der Feststellungen von oben folgt daraus, dass nach eventueller Vertauschung von ξ und η die Relationen $p \mid c$, $q \nmid c$, $p \nmid d$, $q \nmid d$ gelten. Die Zahl $a = \mathrm{ggT}(c, d)$ ist also teilerfremd zu pq. Nach dem Lemma von Bézout gibt es $k, \ell \in \mathbb{Z}$ mit $kc + \ell d = a$. Daraus folgt

$$\xi(k + (pq)) + \eta(\ell + (pq)) \quad = \quad (c + (pq))(k + (pq)) + (d + (pq))(\ell + (pq)) \quad = \quad (kc + \ell d) + (pq) \quad = \quad a + (pq).$$

Also ist $a + (pq)$ im Ideal $I = \xi R + \eta R$ des Rings R enthalten. Weil a wegen $\mathrm{ggT}(a, pq) = 1$ in R eine Einheit ist, folgt daraus $I = (\bar{1}) = R$.

„$\Leftarrow$“ Nun setzen wir $\xi\eta \neq \bar{0}$ voraus. In diesem Fall ausgeschlossen, dass cd von pq geteilt wird, denn sonst wäre $\xi\eta = cd + (pq) = \bar{0}$. Auf Grund der Feststellungen von oben muss also $p \mid c, d$ oder $q \mid c, d$. O.B.d.A. können wir die erste Aussage annehmen. Es gibt dann $k, \ell \in \mathbb{Z}$ mit $c = kp$ und $d = \ell p$. Es folgt $\xi R + \eta R = (\bar{c}) + (\bar{d}) = (\overline{kp}) + (\overline{\ell p}) \subseteq (\bar{p})$. Weil $\bar{p}$ in R keine Einheit ist, folgt daraus $\xi R + \eta R \neq R$.