Aufgabe F13T3A1 (6 Punkte)

Man konstruiere eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 2013.
Hinweis: Man verwende ein geeignetes semidirektes Produkt.

Lösung:

An der Quersumme erkennt man, dass 2013 durch 3 teilbar ist. Zusammen mit der Identität $671 = 660+11 = 11\cdot 60+11 = 11\cdot 61$ findet man auf diesem Weg die Faktorisierung $2013 = 3\cdot 671 = 3\cdot 11\cdot 61$. Es genügt, eine nicht-abelsche Gruppe G der Ordnung $3\cdot 61 = 183$ zu konstruieren, denn dann ist $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}\times G$ eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung $11\cdot 183 = 2013$. Dem Hinweis folgend, konstruieren wir eine solche Gruppe G aus (äußeres) semidirektes Produkt.

Aus der Vorlesung ist bekannt: Sind U und N endliche Gruppen und $\phi : U \to \mathrm{Aut}(N)$ ein nichttrivialer Homomorphismus, also ein Gruppenhomomorphismus mit $\phi(u) \neq \mathrm{id}_N$ für mindestens ein $u \in U$, dann ist $N \rtimes_\phi U$ eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung $|N||U|$. Wir definieren $U = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N} = \mathbb{Z}/61\mathbb{Z}$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass ein Isomorphismus $\mathrm{Aut}(N) \cong (\mathbb{Z}/61\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$ existiert, wobei verwendet wird, dass 61 eine Primzahl ist. Existiert also ein Homomorphismus $\tilde{\phi} : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$, der nicht jedes Element aus $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ auf $\bar{0}$ abbildet, dann erhält man durch Komposition mit dem Isomorphismus einen nichttrivialen Homomorphismus $\phi : U \to \mathrm{Aut}(N)$. Wegen $\mathrm{ord}(\overline{20}) = 3$ in $\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$ ist durch $\tilde{\phi}(\bar{a}) = \overline{20a}$ ein solcher Homorphismus gegeben. Somit ist $N \rtimes_\phi U$ tatsächlich eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 183.