Aufgabe F13T2A5 (6 Punkte)

Sei $L \supseteq K$ eine endliche, galoissche Körpererweiterung. Sei $L' \supseteq K$ eine beliebige weitere Körpererweiterung von K. Zeigen Sie: Gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\phi : L \to L'$ mit $\phi|_K = \mathrm{id}_K$, so ist schon $K = L$.

Lösung:

Nehmen wir an, dass $K \subsetneq L$ gilt. Wir zeigen, dass es dann entweder keinen oder mindestens zwei verschiedene Ringhomorphismen $\phi, \phi' : L \to L'$ mit $\phi|_K = \phi'|_K = \mathrm{id}_K$ gibt. Für den Beweis können wir davon ausgehen, dass ein solcher Homomorphismus ϕ existiert (denn andernfalls sind wir bereits fertig). Da es sich bei $L|K$ um eine endliche Galois-Erweiterung handelt, ist $G = \mathrm{Gal}(L|K)$ eine endliche Gruppe mit $|G| = [L : K]$, und es ist $[L : K] > 1$, denn im Fall $[L : K] = 1$ wäre $L = K$, im Widerspruch zur Annahme.

Wegen $|G| > 1$ gibt es ein Element $\sigma \in G$ mit $\sigma \neq \mathrm{id}_L$. Sei $\alpha \in L$ ein Element mit $\sigma(\alpha) \neq \alpha$. Weil laut Vorlesung Ringhomomorphismen zwischen Körpern stets injektiv sind, folgt als $\sigma(\alpha) \neq \alpha$ auch $(\phi \circ \sigma)(\alpha) = \phi(\sigma(\alpha)) \neq \phi(\alpha)$. Für alle $a \in K$ gilt wegen $\sigma \in \mathrm{Aut}_K(L) = G$ außerdem $(\phi \circ \sigma)(a) = \phi(a) = a$. Insgesamt ist dadurch nachgewiesen, dass $\phi' = \phi \circ \sigma$ ein von ϕ verschieder K-Homomorpismus $L \to L'$ ist. Es gibt also mindestens zwei solche Ringhomomorphismen.