Aufgabe F13T2A1 (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass alle Elemente der Faktorgruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ endliche Ordnung besitzen. Bestimmen Sie die Elemente endlicher Ordnung in den Faktorgruppen $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

Lösung:

Sei $\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Dann gibt es ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $\alpha = r + \mathbb{Z}$. Schreiben wir $r = \frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}$, dann gilt $b\alpha = b(r + \mathbb{Z}) = b(\frac{a}{b} + \mathbb{Z}) = (b \cdot \frac{a}{b}) + \mathbb{Z} = a + \mathbb{Z} = 0 + \mathbb{Z}$, und $0 + \mathbb{Z}$ ist das Neutralelement der Gruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Dies zeigt, dass die Ordnung des Elements α ein Teiler von b ist. Insbesondere ist die Ordnung von α endlich.

Wie soeben gezeigt wurde, sind alle Elemente in der Teilmenge $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ von $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ von endlicher Ordnung. Setzen wir nun umgekehrt voraus, dass $\alpha = r + \mathbb{Z}$ ein Element endlicher Ordnung in $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ist, mit $r \in \mathbb{R}$. Dann gibt es ein $b \in \mathbb{N}$ mit $b\alpha = 0 + \mathbb{Z}$, denn $0 + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ ist das Neutralelement von der Gruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Es folgt $br + \mathbb{Z} = b(r + \mathbb{Z}) = b\alpha = 0 + \mathbb{Z}$ und damit $br \in \mathbb{Z}$. Aus $br = k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ folgt, dass $r = \frac{k}{b}$ in $\mathbb{Q}$ enthalten ist. Somit gilt $\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Die Elemente endlicher Ordnung in $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sind also genau die Elemente von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

In $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ist das Neutralelement $0 + \mathbb{Q}$ offenbar ein Element endlicher Ordnung (nämlich von Ordnung 1). Sei nun $\alpha = r + \mathbb{Q} \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ein beliebiges Element von endlicher Ordnung b, mit $r \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{N}$. Aus $b\alpha = 0 + \mathbb{Q}$ folgt $br + \mathbb{Q} = b(r + \mathbb{Q}) = b\alpha = 0 + \mathbb{Q}$ und $br \in \mathbb{Q}$. Aus $br \in Q$ wiederum folgt $r = \frac{1}{b} \cdot (br) \in \mathbb{Q}$ und $\alpha = r + \mathbb{Q} = 0 + \mathbb{Q}$. Also ist das einzige Element endlicher Ordnung in $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ das Neutralelement $0 + \mathbb{Q}$ der Gruppe.