Aufgabe F13T1A5 (4+6 Punkte)

Sei M die Menge der 3×3-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{C}$, deren charakteristisches Polynom $(x-1)^3$ ist.

(a) Zeigen Sie: Die Gruppe $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ operiert durch Konjugation auf M durch $P * A = PAP^{-1}$ für $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ und $A \in M$.

(b) Bestimmen Sie die Anzahl der Bahnen dieser Operation.

Lösung:

zu (a) Für jedes $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ und jedes $A \in M$ sind A und $P*A = PAP^{-1}$ ähnliche Matrizen, und aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass ähnliche Matrizen dasselbe charakteristische Polynom besitzen. Also ist auch das charakteristische Polynom von $P*A$ gleich $(x-1)^3$, und daraus folgt, dass durch $*$ eine Abbildung $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C}) \times M \to M$ definiert ist. Um zu zeigen, dass $*$ darüber hinaus eine Gruppenoperation ist, seien $P, Q \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ und $A \in M$ vorgegeben. Zu überprüfen ist $E*A = A$ und $P*(Q*A) = (PQ)*A$, wobei E das Neutralelement von $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$, die Einheitsmatrix, bezeichnet. Die erste Gleichung erhält man durch $E * A = EAE^{-1} = EAE = AE = A$, und die zweite ergibt sich durch die Rechnung

$$\begin{aligned} P*(Q*A) \quad &= \quad P*(QAQ^{-1}) \quad = \quad P(QAQ^{-1})P^{-1} \quad = \\ (PQ)A(Q^{-1}P^{-1}) \quad &= \quad (PQ)A(PQ)^{-1} \quad = \quad (PQ)*A. \end{aligned}$$

zu (b) Zwei Elemente $A, B \in M$ liegen genau dann in derselben Bahn der Operation, wenn ein $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ mit $B = P*A = PAP^{-1}$ existiert, also genau dann, wenn A und B ähnlich sind. Für jedes $A \in M$ zerfällt das charakteristische Polynom $\chi_A = (x-1)^3$ in Linearfaktoren, also ist A jeweils ähnlich zu einer Matrix in Jordanscher Normalform. Zwei Matrizen in Jordanscher Normalform sind genau dann ähnlich zueinander, wenn sie bis auf Reihenfolge dieselben Jordanblöcke enthalten. Insgesamt folgt daraus, dass jedes $A \in M$ in der Bahn einer der Matrizen

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

liegt, denn bis auf Reihenfolge der Jordanblöcke sind dies die einzigen Matrizen in Jordanscher Normalform mit $(x-1)^3$ als charakteristischem Polynom. Also existieren höchstens drei verschiedene Bahnen bezüglich der Operation. Da andererseits J_1, J_2, J_3 nicht bis auf Reihenfolge dieselben Jordanblöcke enthalten, sind sie nicht zueinander ähnlich, liegen also in verschiedenen Bahnen. Dies zeigt, dass es genau drei Bahnen bezüglich dieser Operation gibt.