**Aufgabe F13T1A4** (10 Punkte)

Sei $f \in \mathbb{C}[x]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass es höchstens $n-1$ komplexe Zahlen $\alpha$ gibt, für die $f(x) - \alpha$ eine mehrfache Nullstelle hat.

*Lösung:*

Seien $z_1, ..., z_r \in \mathbb{C}$ die verschiedenen Nullstellen von $f' \in \mathbb{C}[x]$. Wegen $\mathrm{grad}(f') = n-1$ gilt $r \leq n-1$. Sei nun $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Zahl mit der Eigenschaft, dass $f_\alpha = f - \alpha$ eine mehrfache Nullstelle $z \in \mathbb{C}$ besitzt. Dann ist $z \in \mathbb{C}$ auch eine Nullstelle von $f'_\alpha = f'$ und somit $z = z_i$ für ein $i \in \{1, ..., r\}$. Nehmen wir nun an, dass $z_i$ auch mehrfache Nullstelle von $f_\beta$ ist, für ein $\beta \in \mathbb{C}$. Dann folgt

$$\beta \quad = \quad 0 + \beta \quad = \quad f_\beta(z_i) + \beta \quad = \quad f(z_i) - \beta + \beta \quad = \quad f(z_i) \quad =$$
$$f(z_i) - \alpha + \alpha \quad = \quad f_\alpha(z_i) + \alpha \quad = \quad 0 + \alpha \quad = \quad \alpha.$$

Dies zeigt, dass für jedes $i \in \{1, ..., r\}$ höchstens ein Polynom der Form $f_\alpha$ mit $z_i$ als mehrfacher Nullstelle existiert. Insgesamt gibt es also höchstens $r \leq n-1$ Werte $\alpha \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, dass $f_\alpha$ mehrfache Nullstellen besitzt.