Aufgabe F13T1A1

Sei $S = \{n \in \mathbb{Z} \mid \text{ es gibt } x, y \in \mathbb{Z} \text{ mit } n = x^2 - 23y^2\}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Zahl 97 ist kein Element von S.
Hinweis: Sie können zum Beispiel das Quadratische Reziprozitätsgesetz verwenden.

(b) Sind $a, b \in S$, dann ist auch $ab \in S$.

Lösung:

zu (a) Angenommen, die Zahl 97 liegt in S. Dann gäbe es $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $x^2 - 23y^2 = 97$. Daraus würde $x^2 \equiv 97 \mod 23$ folgen, es wäre also 97 ein quadratischer Rest modulo 23. Weil die Primzahl 23 zudem kein Teiler von 97 ist, würde für das Legendre-Symbol also

$$\left(\frac{97}{23}\right) = 1 \qquad \text{gelten.}$$

Aber die Rechenregeln für das Legendre-Symbol einschließlich dem quadratischen Reziprozitätsgesetz liefern

$$\left(\frac{97}{23}\right) = \left(\frac{5}{23}\right) = \left(\frac{23}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}\right) = \left(\frac{5}{3}\right)$$
$$= \left(\frac{2}{3}\right) = (-1)^{\frac{3^2-1}{8}} = -1.$$

Die Annahme $97 \in S$ hat also zu einem Widerspruch geführt.

zu (b) Hier ist die Rechnung am übersichtlichsten, wenn man im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{23}]$ rechnet. Sind $a, b \in S$, dann gibt es $u, v, x, y \in \mathbb{Z}$ mit

$$a = u^2 - 23v^2 = (u - v\sqrt{23})(u + v\sqrt{23}) \quad \text{und} \quad b = x^2 - 23y^2 = (x - y\sqrt{23})(x + y\sqrt{23}).$$

Es gilt

$$(u - v\sqrt{23})(x - y\sqrt{23}) = (ux + 23vy) - (vx + uy)\sqrt{23}$$

und

$$(u + v\sqrt{23})(x + y\sqrt{23}) = (ux + 23vy) + (vx + uy)\sqrt{23}.$$

Durch Einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned} ab &= (u - \sqrt{23}v)(u + \sqrt{23}v)(x - \sqrt{23}y)(x + \sqrt{23}y) \\ &= (u - \sqrt{23}v)(x - \sqrt{23}y)(u + \sqrt{23}v)(x + \sqrt{23}y) \\ &= ((ux + 23vy) - (vx + uy)\sqrt{23})((ux + 23vy) + (vx + uy)\sqrt{23}) \\ &= (ux + 23vy)^2 - 23(vx + uy)^2. \end{aligned}$$

Wegen $ux + 23vy \in \mathbb{Z}$ und $vx + uy \in \mathbb{Z}$ liegt ab also in S.