Aufgabe F12T3A5 (6 Punkte)

Sei $L|K$ eine endliche Galoiserweiterung, $G = \mathrm{Gal}(L|K)$ die zugehörige Galoisgruppe, $\alpha \in L$ und f das normierte Minimalpolynom von α über K. Zeigen Sie, dass

$$f^{[L:K(\alpha)]} \quad = \quad \prod_{\sigma \in G} (x - \sigma(\alpha)) \qquad \text{gilt.}$$

Lösung:

Weil die Erweiterung $L|K$ normal ist und das Polynom f mit α in L eine Nullstelle besitzt, zerfällt f über L in Linearfaktoren. Weil $L|K$ auch separabel ist, ist das Element $\alpha \in L$ separabel über K, und folglich ist f als sein Minimalpolynom über K separabel. Folglich besitzt f in L genau n verschiedene Nullstellen $\alpha_1, ..., \alpha_n$, wobei n den Grad von f bezeichnet.

Sei $U \leq G$ die Untergruppe von G gegeben durch $U = \mathrm{Gal}(L|K(\alpha))$ und R ein Repräsentantensystem der Menge G/U der Linksnebenklassen von U. Auf Grund der Ergänzungen zum Hauptsatz der Galoistheorie gilt $|U| = [L : K(\alpha)]$ und $|R| = [K(\alpha) : K] = \mathrm{grad}(f) = n$. Für jedes $k \in \{1, ..., n\}$ gibt es auf Grund des Fortsetzungssatzes ein $\tau \in G$ mit $\tau(\alpha) = \alpha_k$. Bezeichnen wir mit $\sigma_k \in R$ das eindeutig bestimmte Element mit $\sigma_k U = \tau U$, dann gibt es ein $\rho \in U$ mit $\sigma_k = \tau \circ \rho$, und wegen $\rho \in \mathrm{Gal}(L|K(\alpha))$ folgt

$$\sigma_k(\alpha) \quad = \quad (\tau \circ \rho)(\alpha) \quad = \quad \tau(\alpha) \quad = \quad \alpha_k.$$

Damit erhalten wir

$$f \quad = \quad \prod_{k=1}^{n} (x - \alpha_k) \quad = \quad \prod_{k=1}^{n} (x - \sigma_k(\alpha)) \quad = \quad \prod_{\sigma \in R} (x - \sigma(\alpha)).$$

Nun zeigen wir noch, dass durch $\phi : R \times U \to G$, $(\sigma, \tau) \mapsto \sigma \circ \tau$ eine Bijektion gegeben ist. Wegen $|R \times U| = |R||U| = (G : U)|U| = |G|$ (Satz von Lagrange) genügt es, die Surjektivität nachzuweisen. Sei also $\tau \in G$ vorgegeben. Sei $\sigma \in R$ das eindeutig bestimmte Element mit $\tau U = \sigma U$. Es existiert dann ein $\rho \in U$ mit $\tau = \sigma \circ \rho$, so dass also $\phi(\sigma, \rho) = \sigma \circ \rho = \tau$ gilt. Damit ist die Surjektivität nachgewiesen. Mit Hilfe der bijektiven Abbildung ϕ erhalten wir nun die gewünschte Gleichung durch folgende Rechnung.

$$\prod_{\tau \in G} (x - \tau(\alpha)) \quad = \quad \prod_{(\sigma,\rho) \in R \times U} (x - \phi(\sigma, \rho)(\alpha)) \quad = \quad \prod_{\sigma \in R} \prod_{\rho \in U} (x - \phi(\sigma, \rho)(\alpha)) \quad =$$

$$\prod_{\sigma \in R} \prod_{\rho \in U} (x - \sigma(\rho(\alpha))) \quad = \quad \prod_{\sigma \in R} \prod_{\rho \in U} (x - \sigma(\alpha)) \quad = \quad \prod_{\sigma \in R} (x - \sigma(\alpha))^{|U|} \quad =$$

$$\left(\prod_{\sigma \in R} (x - \sigma(\alpha)) \right)^{|U|} \quad = \quad f^{|U|} \quad = \quad f^{[L:K(\alpha)]}.$$