Aufgabe F12T3A4 (6 Punkte)

Sei R ein Integritätsring. Zeigen Sie: Ist $R[x]$ ein Hauptidealring, so ist R ein Körper.

Lösung:

Um zu zeigen, dass R ein Körper ist, beweisen wir zunächst die Irreduzibilität des Elements $x \in R[x]$. Zunächst einmal ist x keine Einheit. Denn ansonsten gäbe es ein $f \in R[x]$ mit $xf(x) = 1$. Da R ein Integritätsring ist, gilt allgemein $\text{grad}(gh) = \text{grad}(g) + \text{grad}(h)$ für beliebige Polynome $g, h \in R[x]$ ungleich null. Aus $xf(x) = 1$ würde also insbesondere $\text{grad}(x) + \text{grad}(f) = \text{grad}(1)$, also $1 + \text{grad}(f) = 0$ folgen, was aber wegen $\text{grad}(f) \geq 0$ ausgeschlossen ist. Nehmen wir nun an, $x \in R[x]$ ist ein reduzibles Element. Dann gibt es Nicht-Einheiten $g, h \in R[x]$ mit $x = gh$. Aus $\text{grad}(g) + \text{grad}(h) = \text{grad}(gh) = \text{grad}(x) = 1$ folgt $\text{grad}(g) = 0$ oder $\text{grad}(h) = 0$. Also können wir o.B.d.A. davon ausgehen, dass das Polynom h eine Konstante ist. Es folgt $x = cg$. Das Polynom g ist dann vom Grad 1, es gilt also $g = ax + b$ für geeignete $a, b \in R$ mit $a \neq 0$. Aus $x = c(ax + b) = acx + bc$ folgt $ac = 1$. Folglich wäre $h = c$ eine Einheit, im Widerspruch dazu, dass h laut Annahme eine Nicht-Einheit ist.

Also ist x tatsächlich irreduzibel. Da es sich bei $R[x]$ um einen Hauptidealring handelt, ist (x) somit ein maximales Ideal, und der Faktorring $R[x]/(x)$ ist ein Körper. Wir beweisen nun noch mit Hilfe des Homomorphiesatzes für Ringe, dass $R[x]/(x) \cong R$ ist, woraus dann folgt, dass auch R ein Körper ist. Dazu betrachten wir den Einsetzhomomorphismus $\phi : R[x] \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(0)$. Dieser Homomorphismus ist surjektiv, denn für vorgegebenes $c \in R$ gilt $\phi(c) = c$. Für jedes Polynom $f = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ (mit $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, ..., a_n \in R$) gilt die Äquivalenz

$$f \in \ker(\phi) \quad \Leftrightarrow \quad f(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \mid f \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, g \in R[x] : f = xg \quad \Leftrightarrow \quad f \in (x).$$

Also gilt $\ker(f) = (x)$. Damit sind die Voraussetzungen des Homomorphiesatzes erfüllt, und wir erhalten $R[x]/(x) \cong R$ wie gewünscht.