Aufgabe F12T3A3 (6 Punkte)

Für welche $a, b \in \mathbb{Q}$ ist das Polynom $(x-1)^2$ ein Teiler von $f = ax^{30} + bx^{15} + 1$?

Lösung:

Seien $a, b \in \mathbb{Q}$ und $f \in \mathbb{Q}[x]$ wie angegeben. Es ist $(x-1)^2$ genau dann ein Teiler von f in $\mathbb{Q}[x]$, wenn 1 eine doppelte Nullstelle von f ist. Dies wiederum gilt genau dann, wenn $f(1) = f'(1) = 0$ ist. Nun gilt $f' = 30ax^{29} + 15bx^{14}$, also $f(1) = a + b + 1$ und $f'(1) = 30a + 15b$. Es gilt also die Äquivalenz

$$(x-1)^2 \mid f \quad \Leftrightarrow \quad f(1) = f'(1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a + b + 1 = 0 \text{ und } 30a + 15b = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$a + b + 1 = 0 \text{ und } 2a + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a + b + 1 = 0 \text{ und } b = -2a \quad \Leftrightarrow$$
$$-a + 1 = 0 \text{ und } b = -2a \quad \Leftrightarrow \quad a = 1 \text{ und } b = -2.$$

Also ist $(x-1)^2$ ein Teiler von f genau dann, wenn $a = 1$ und $b = -2$ ist.