

Aufgabe F12T3A1 (6 Punkte)

In der Gruppe $G = \text{GL}_4(\mathbb{C})$ betrachten wir die Teilmenge

$$M = \left\{ B \in \text{GL}_4(\mathbb{C}) \mid B^2 = E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass alle Matrizen $B \in M$ diagonalisierbar sind.
- (b) Zeigen Sie, dass die Operation $G \times M \rightarrow M$, $(A, B) \mapsto ABA^{-1}$ von G auf M durch Konjugation wohldefiniert ist und die Menge M in genau 5 disjunkte Bahnen zerlegt.

Lösung:

zu (a) Sei $B \in M$. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass B genau dann diagonalisierbar ist, wenn wir \mathbb{C}^4 als direkte Summe von Eigenräumen der Matrix B darstellen können. Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von B und $v \in \mathbb{C}^4$ ein zugehöriger Eigenvektor, dann gilt

$$\lambda^2 v = \lambda(\lambda v) = \lambda(Bv) = B(\lambda v) = B^2 v = E_4 v = 1 \cdot v,$$

also $(\lambda^2 - 1)v = 0$, woraus wegen $v \neq 0$ die Gleichung $\lambda^2 - 1 = 0$ und somit $\lambda \in \{\pm 1\}$ folgt. Die Menge der Eigenwerte von B ist also in $\{\pm 1\}$ enthalten (wobei aber ± 1 nicht unbedingt beides Eigenwerte von B sein müssen, wie das Beispiel $B = E_4$ zeigt). Wir beweisen nun die Gleichung

$$\mathbb{C}^4 = \text{Eig}(B, 1) \oplus \text{Eig}(B, -1).$$

Die Inklusion „ \supseteq “ ist offensichtlich. Zum Beweis von „ \subseteq “ sei $v \in \mathbb{C}^4$ vorgegeben. Setzen wir $u = \frac{1}{2}(v + Bv)$ und $w = \frac{1}{2}(v - Bv)$, dann gilt $u + w = \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}Bv + \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}Bv = v$. Aus $Bu = \frac{1}{2}Bv + \frac{1}{2}B^2v = \frac{1}{2}Bv + E_4v = v + \frac{1}{2}Bv = u$ folgt $u \in \text{Eig}(B, 1)$. Aus $Bw = \frac{1}{2}Bv - \frac{1}{2}B^2v = \frac{1}{2}Bv - E_4v = -v + \frac{1}{2}Bv = -u$ folgt ebenso $u \in \text{Eig}(B, -1)$. Insgesamt ist damit $v = u + w \in \text{Eig}(B, 1) \oplus \text{Eig}(B, -1)$ nachgewiesen. Aus der soeben bewiesenen Gleichung folgt die Diagonalisierbarkeit von B .

zu (b) Zunächst überprüfen wir, dass durch $G \times M \rightarrow \mathcal{M}_{4,\mathbb{C}}$, $(A, B) \mapsto ABA^{-1}$ tatsächlich eine Abbildung $G \times M \rightarrow M$ definiert ist, wobei $\mathcal{M}_{4,\mathbb{C}}$ die Menge der 4×4 -Matrizen über \mathbb{C} bezeichnet. Seien dazu $A \in G$ und $B \in M$ vorgegeben. Aus $M^2 = E_4$ folgt $(A \cdot B)^2 = (ABA^{-1})^2 = (ABA^{-1})(ABA^{-1}) = AB^2A^{-1} = A \cdot B$, also ist auch $A \cdot B$ wieder in M enthalten. Darüber hinaus ist durch die Abbildung $G \times M \rightarrow M$ eine Operation von G auf M definiert. Denn für jedes $B \in M$ ist $E_4 \cdot M = E_4 M E_4^{-1} = M$, und für alle $A_1, A_2 \in G$ und $B \in M$ gilt

$$(A_1 A_2) \cdot B = (A_1 A_2) B (A_1 A_2)^{-1} = A_1 A_2 B A_2^{-1} A_1^{-1} = A_1 \cdot (A_2 B A_2^{-1}) = A_1 \cdot (A_2 \cdot B).$$

Um zu zeigen, dass M bezüglich der Operation in genau fünf Bahnen zerfällt, betrachten wir die fünf Matrizen

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und zeigen, dass $G(B_k)$ mit $0 \leq k \leq 4$ genau die fünf Bahnen der Operation sind. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ und je zwei ähnliche Matrizen $B, B' \in M$ die geometrischen Vielfachheiten $\mu_g(B, \lambda)$ und $\mu_g(B', \lambda)$ übereinstimmen. (Ist nämlich $A \in G$ mit $B' = ABA^{-1}$, dann ist durch $v \mapsto Av$ eine bijektive lineare Abbildung zwischen $\text{Eig}(B, \lambda)$ und $\text{Eig}(B', \lambda)$ definiert, und somit haben die Vektorräume dieselbe Dimension. Alternativ kann man sich auch auf den Satz berufen, dass ähnliche Matrizen bis auf Reihenfolge dieselbe Jordansche Normalform besitzen. Bekanntlich ist die geometrische Vielfachheit von λ die Anzahl der Jordankästchen zum Eigenwert λ in der Jordanschen Normalform.) Offenbar gilt $\mu_g(B_k, 1) = 4 - k$ und $\mu_g(B_k, -1) = k$ für $0 \leq k \leq 4$, wie man an den Diagonaleinträgen unmittelbar abliest.

Würden zwei Bahnen $G(B_k)$ und $G(B_\ell)$ mit $k \neq \ell$ übereinstimmen, dann würde daraus $B_\ell \in G(B_k)$ folgen, und damit gäbe es eine Matrix $A \in G$ mit $B_\ell = AB_kA^{-1}$. Die Matrizen wären also ähnlich zueinander, und folglich wären die geometrischen Vielfachheiten $\mu_g(B_k, 1)$ und $\mu_g(B_\ell, 1)$ gleich. Aber wie wir oben festgestellt haben, ist dies nicht der Fall, und somit sind durch $G(B_k)$ mit $0 \leq k \leq 4$ fünf verschiedene Bahnen der Gruppenoperation gegeben.

Sei nun $G(B)$ eine beliebige Bahn der Gruppenoperation, mit $B \in M$. Weil B nach Teil (a) diagonalisierbar ist, gibt es ein $A \in G$, so dass $D = ABA^{-1}$ eine Diagonalmatrix ist; dabei sind die Einträge auf der Diagonalen genau die Eigenwerte von D und A . Wie in Teil (a) gezeigt wurde, sind nur ± 1 als Eigenwerte möglich. Nehmen wir an, dass es genau ℓ 1-en und k (-1)-en auf der Hauptdiagonale gibt. Dann ist $k + \ell = 4$. Weil zwei Diagonalmatrizen genau dann ähnlich zueinander sind, wenn sich bis auf Reihenfolge dieselben Elemente auf der Hauptdiagonalen befinden, gibt es ein $A' \in G$ mit $A'D(A')^{-1} = B_k$. Insgesamt gilt $B = A^{-1}DA = A^{-1}(A')^{-1}B_kA'A = (A'A)^{-1}B_k(A'A) = (A'A)^{-1} \cdot B_k \in G(B_k)$. Also liegt jedes $B \in M$ in einer der fünf Bahnen $G(B_0), \dots, G(B_4)$. Dies zeigt, dass es bezüglich der Operation keine weiteren Bahnen gibt. Insgesamt haben wir also bewiesen, dass M bezüglich der Operation in genau fünf Bahnen zerfällt.