Aufgabe F12T2A4 (10 Punkte)

Es sei $L \subseteq \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper von $f = x^4 + 4x^2 + 2 \in \mathbb{Q}[x]$.

(a) Begründen Sie, dass f irreduzibel ist.

(b) Warum ist die Körpererweiterung $L|\mathbb{Q}$ galoissch?

(c) Es sei $\alpha \in L$ eine Nullstelle von f. Begründen Sie, dass $\beta = \alpha^3 + 3\alpha$ eine Nullstelle von f ist.

(d) Begründen Sie, dass $\mathbb{Q}(\alpha) = L$ gilt.

(e) Wie viele Elemente enthält die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$?

(f) Ist die Galoisgruppe zyklisch? Begründen Sie Ihre Antwort. (Hinweis: Betrachten Sie den $\mathbb{Q}$-Automorphismus σ, der durch $\sigma(\alpha) = \beta$ gegeben ist, und bestimmen Sie $\sigma^2(\alpha)$.)

Lösung:

zu (a) Das Eisenstein-Kriterium, angewendet auf die Primzahl $p = 2$, liefert die Irreduzibilität von f in $\mathbb{Z}[x]$, denn es gilt $2 \nmid 1$, $2 \mid 4$, $2 \mid 2$ und $2^2 \nmid 2$. Mit dem Gaußschen Lemma folgt daraus die Irreduzibilität in $\mathbb{Q}[x]$.

zu (b) Als Zerfällungskörper eines Polynoms $f \in \mathbb{Q}[x]$ ist L über $\mathbb{Q}$ normal. Als normale Erweiterung ist $L|\mathbb{Q}$ insbesondere algebraisch. Als algebraische Erweiterung ist $L|\mathbb{Q}$ wegen $\mathrm{char}(\mathbb{Q}) = 0$ auch separabel. Eine normale und separable Erweiterung ist nach Definition eine galoissche Erweiterung.

zu (c) Aus $f(\alpha) = 0$ folgt $\alpha^4 + 4\alpha^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha^4 = -2 - 4\alpha^2$. Daraus folgt $\alpha^5 = \alpha \cdot \alpha^4 = \alpha(-2 - 4\alpha^2) = -2\alpha - 4\alpha^3$ und

$$\begin{aligned} \alpha^6 &= \alpha\alpha^5 = \alpha(-2\alpha - 4\alpha^3) = 2\alpha^2 - 4\alpha^4 = -2\alpha^2 - 4(-2 - 4\alpha^2) \\ &= -2\alpha^2 + 8 + 16\alpha^2 = 8 + 14\alpha^2. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} \beta^2 &= (\alpha^3 + 3\alpha)^2 = \alpha^6 + 6\alpha^4 + 9\alpha^2 = (8 + 14\alpha^2) + 6(-2 - 4\alpha^2) + 9\alpha^2 \\ &= 8 + 14\alpha^2 - 12 - 24\alpha^2 + 9\alpha^2 = -4 - \alpha^2 \end{aligned}$$

und

$$\beta^4 = (\beta^2)^2 = (-4 - \alpha^2)^2 = 16 + 8\alpha^2 + \alpha^4 = 16 + 8\alpha^2 + (-2 - 4\alpha^2) = 14 + 4\alpha^2$$

und schließlich $f(\beta) = \beta^4 + 4\beta^2 + 2 = (14 + 4\alpha^2) + 4(-4 - \alpha^2) + 2 = 14 + 4\alpha^2 - 16 - 4\alpha^2 + 2 = 0$.

zu (d) Weil sämtliche Exponenten im Polynom f gerade sind, ist mit jedem Element $\gamma \in \mathbb{C}$ auch das Negative $-\gamma$ eine Nullstelle von f, denn es gilt $f(-\gamma) = (-\gamma)^4 + 4(-\gamma)^2 + 2 = \gamma^4 + 4\gamma^2 + 2 = f(\gamma) = 0$. Mit Teil (c) ergibt sich also, dass die Elemente $\pm\alpha, \pm\beta$ alles Nullstellen von f sind. Wir zeigen, dass durch $\pm\alpha, \pm\beta$ vier verschiedene komplexe Zahlen sind. Es gilt $\alpha \neq -\alpha$, denn ansonsten wäre $\alpha = 0$, und folglich wäre 0 eine Nullstelle von f, was aber wegen $f(0) = 2 \neq 0$ nicht der Fall ist. Aus demselben Grund gilt auch $\beta \neq -\beta$. Wäre $\alpha = \beta$, dann würde sich daraus $\alpha = \alpha^3 + 3\alpha \Leftrightarrow \alpha^3 + 2\alpha = 0$ ergeben. Es wäre dann $g = x^3 + 2x$ ein Polynom ungleich Null vom Grad $< \mathrm{grad}(f)$ mit α als Nullstelle. Aber dies ist unmöglich, denn f ist das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$ und somit ein Polynom in $\mathbb{Q}[x]$ minimalen Grades mit α als Nullstelle; es gibt also keine Polynome ungleich Null vom Grad < 4 mit α als Nullstelle. Ebenso sieht man anhand der Äquivalenz $\alpha = -\beta \Leftrightarrow \alpha = -\alpha^3 - 3\alpha \Leftrightarrow \alpha^3 + 4\alpha = 0$, dass $\alpha \neq -\beta$ ist. Also sind die vier Elemente $\pm\alpha, \pm\beta$ tatsächlich verschieden, und wegen $\operatorname{grad}(f) = 4$ kann es keine weiteren komplexen Nullstellen geben. Setzen wir $N = \{\pm\alpha, \pm\beta\}$, dann gilt also $L = \mathbb{Q}(N)$ nach Definition des Zerfällungskörpers. Zu zeigen ist nun

$$\mathbb{Q}(N) \quad = \quad \mathbb{Q}(\alpha).$$

Die Inklusion „$\supseteq$“ gilt wegen $\alpha \in N \subseteq \mathbb{Q}(N)$. Für die Inklusion „$\subseteq$“ genügt es zu bemerken, dass mit α auch $\beta = \alpha^3 + 3\alpha$ in $\mathbb{Q}(\alpha)$ liegt, denn $\mathbb{Q}(\alpha)$ ist ein Teilkörper von $\mathbb{C}$. Mit α und β liegen auch $-\alpha$ und $-\beta$ in $\mathbb{Q}(\alpha)$. Es gilt also $N \subseteq \mathbb{Q}(\alpha)$, und daraus folgt $\mathbb{Q}(N) \subseteq \mathbb{Q}(\alpha)$.

zu (e) Nach Teil (b) ist $\operatorname{Gal}(L|\mathbb{Q})$ eine Galois-Erweiterung, und nach Teil (d) gilt $L = \mathbb{Q}(\alpha)$. Daraus folgt $|\operatorname{Gal}(L|\mathbb{Q})| = [L : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$. Das Polynom f ist normiert, nach Teil (a) irreduzibel über $\mathbb{Q}$, und es gilt $f(\alpha) = 0$. Dies zeigt, dass f das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$ ist, und daraus folgt $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = \operatorname{grad}(f) = 4$. Insgesamt ist $\operatorname{Gal}(L|\mathbb{Q})$ also eine Gruppe der Ordnung 4.

zu (f) Für das Element $\operatorname{Gal}(L|\mathbb{Q})$ gilt

$$\sigma^2(\alpha) \quad = \quad \sigma(\sigma(\alpha)) \quad = \quad \sigma(\beta) \quad = \quad \sigma(\alpha^3 + 3\alpha) \quad = \quad \sigma(\alpha)^3 + 3\sigma(\alpha) \quad = \quad \beta^3 + 3\beta$$

Es ist

$$\beta^3 \quad = \quad \beta \cdot \beta^2 \quad = \quad (\alpha^3 + 3\alpha)(-4 - \alpha^2) \quad = \quad -4\alpha^3 - 12\alpha - \alpha^5 - 3\alpha^3 \quad =$$
$$-4\alpha^3 - 12\alpha - (-2\alpha - 4\alpha^3) - 3\alpha^3 \quad = \quad -4\alpha^3 - 12\alpha + 2\alpha + 4\alpha^3 - 3\alpha^3 \quad = \quad -10\alpha - 3\alpha^3$$

und somit $\sigma^2(\alpha) = (-10\alpha - 3\alpha^3) + 3(\alpha^3 + 3\alpha) = -10\alpha - 3\alpha^3 + 3\alpha^3 + 9\alpha = -\alpha \neq \alpha$. Insbesondere ist $\sigma^2(\alpha) \neq \alpha$ und somit $\sigma^2 \neq \mathrm{id}_L$. Die Ordnung von σ ist also kein Teiler von 2. Andererseits ist $\operatorname{ord}(\sigma)$ ein Teiler von $|\operatorname{Gal}(L|\mathbb{Q})| = 4$. Also muss $\operatorname{ord}(\sigma) = 4 = |\operatorname{Gal}(L|\mathbb{Q})|$ gelten. Dies zeigt, dass die Galoisgruppe zyklisch ist.