Aufgabe F12T2A3 (6 Punkte)

Bestimmen Sie alle Teiler von 6 im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}] = \{a + \sqrt{-6}b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

Lösung:

Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ und $N : R \to \mathbb{R}_+$ die Normfunktion gegeben durch $N(\alpha) = \alpha\bar{\alpha}$ für alle $\alpha \in R$. Jedes $\alpha \in R$ hat die Form $\alpha = a + \sqrt{-6}b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$, und folglich gilt $N(\alpha) = \alpha\bar{\alpha} = (a + \sqrt{-6}b)(a - \sqrt{-6}b) = a^2 + 6b^2 \in \mathbb{N}_0$. Dies zeigt, dass die Bildmenge von N in $\mathbb{N}_0$ enthalten ist. Darüber hinaus ist N multiplikativ, denn für alle $\alpha, \beta \in R$ gilt

$$N(\alpha\beta) \quad = \quad (\alpha\beta) \cdot (\overline{\alpha\beta}) \quad = \quad \alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta} \quad = \quad N(\alpha)N(\beta).$$

Nehmen wir nun an, dass α ein Teiler von 6 in R ist. Dann gibt es ein $\beta \in R$ mit $\alpha\beta = 6$. Es folgt $N(\alpha)N(\beta) = N(\alpha\beta) = N(6) = 36$, also ist $N(\alpha)$ ein Teiler von 36. Wegen $\alpha \neq 0$ gilt außerdem $N(\alpha) = |\alpha|^2 \neq 0$, also $N(\alpha) \in \mathbb{N}$. Die Teiler von $36 = 2^2 3^2$ in $\mathbb{N}$ sind

$$1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 6\ ,\ 9\ ,\ 12\ ,\ 18\ ,\ 36.$$

Wir bestimmen nun für jeden Teiler $d \in \mathbb{N}$ von 36 sämtliche Elemente $\alpha \in R$ mit $N(\alpha) = d$. Dazu bestimmen wir für jedes d jeweils alle Lösungen $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ mit $a^2 + 6b^2 = d$ und geben anschließend das zugehörige Element $\alpha = a + b\sqrt{-6}$ der Norm d an.

Teiler d von 36	1	2	3	4	6	9	12	18	36
Lösungen (a, b) von $a^2 + 6b^2 = d$	$(\pm1, 0)$	–	–	$(\pm2, 0)$	$(0, \pm1)$	$(\pm3, 0)$	–	–	$(\pm6, 0)$
zugeh. Elemente $\alpha = a + b\sqrt{-6}$	±1	–	–	±2	$\pm\sqrt{-6}$	±3	–	–	±6

Die Menge der Teiler von 6 ist also in der Menge $\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm\sqrt{-6}, \pm6\}$ enthalten. Umgekehrt zeigen die Gleichungen

$$1 \cdot 6 = 6 \quad , \quad (-1)(-6) = 6 \quad , \quad 2 \cdot 3 = 6 \quad , \quad (-2)(-3) = 6 \quad \text{und} \quad \sqrt{-6} \cdot (-\sqrt{-6}) = 6$$

dass alle aufgezählenten Elemente tatsächlich Teiler von 6 sind. Also besitzt das 6 im Ring R genau zehn verschiedene Teiler.