Aufgabe F12T2A2

Sei G eine endliche Gruppe und p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Elemente der Ordnung p in G durch $p-1$ teilbar ist.

Lösung:

Sei r die Anzahl der Untergruppen der Ordnung p von G. Jedes Element $g \in G$ der Ordnung p ist in genau einer Untergruppe von G der Ordnung p enthalten, nämlich in der Untergruppe $\langle g \rangle$, die von diesem Element erzeugt wird. Andererseits enthält jede Untergruppe U der Ordnung p genau $p-1$ Elemente der Ordnung p. Denn nach dem Satz von Lagrange ist die Ordnung jedes Elements aus U ein Teiler von $|U| = p$; weil p eine Primzahl ist, sind deshalb alle Elemente außer dem Neutralelement von Ordnung p. Es gibt also insgesamt genau $r(p-1)$ Elemente der Ordnung p in G, insbesondere ist die Anzahl durch $p-1$ teilbar.