Aufgabe F12T2A1 (Punkte)

Geben Sie für Ihre Antworten auf die folgenden Fragen jeweils eine *kurze* Begründung an.

(a) Sind die Gruppen $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ isomorph?

(b) Ist die alternierende Gruppe A_4 einfach?

(c) Sind sämtliche Elemente der Ordnung 2 in S_5 zueinander konjugiert?

(d) Ist (x) im Polynomring $\mathbb{Z}[x]$ ein Primideal?

Lösung:

zu (a) Ja. Nach dem Chinesischen Restsatz sind die Gruppe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ isomorph zueinander, falls m und n teilerfremd sind. Daraus folgt

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}.$$

zu (b) Nein. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Kleinsche Vierergruppe $V_4 = \{\mathrm{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$ ein Normalteiler von A_4 ist. (Obwohl danach nicht gefragt war, bemerken wir noch, dass laut Vorlesung die Gruppe A_n für $n \geq 5$ einfach ist.)

zu (c) Nein. Laut Vorlesung sind in der symmetrischen Gruppe zwei Elemente σ, τ genau dann zueinader kongugiert (d.h. es gibt ein $\rho \in S_5$ mit $\rho\sigma\rho^{-1} = \tau$), wenn in der disjunkten Zykelzerlegung von σ und τ jede Zykellänge gleich oft vorkommt. Dies zeigt, dass beispielsweise die Elemente $(1\ 2)$ und $(1\ 2)(3\ 4)$ in S_5 nicht zueinander konjugiert sind, obwohl sie beide von Ordnung 2 sind.

zu (d) Ja. Wendet man auf den Einsetzhomomorphismus $\phi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}$, $f \mapsto f(0)$ den Homomorphiesatz für Ringe an, so erhält man $\mathbb{Z}[x]/(x) \cong \mathbb{Z}$, denn wegen $\phi(a) = a$ für alle $a \in \mathbb{Z}$ ist ϕ surjektiv, und wegen $g \in \ker(\phi) \Leftrightarrow \phi(g) = 0 \Leftrightarrow g(0) = 0 \Leftrightarrow g \in (x)$ für alle $g \in \mathbb{Z}[x]$ gilt $\ker(\phi) = (x)$. Bekanntlich ist $\mathbb{Z}$ ein Integritätsbereich, somit auch $\mathbb{Z}[x]/(x)$, und daraus wiederum folgt, dass (x) in $\mathbb{Z}[x]$ ein Primideal ist.