Aufgabe F12T1A3 (6 Punkte)

Die Teilmenge $R = \{q \in \mathbb{Q} \mid \exists\, a,b \in \mathbb{Z} : q = \frac{a}{b}$ und $2 \nmid b$ und $3 \nmid b\}$ des Körpers der rationalen Zahlen ist ein Unterring, der die ganzen Zahlen enthält.

(a) Bestimmen Sie die Einheitengruppe $R^\times$.

(b) Zeigen Sie, dass 2 und 3 Primelemente von R sind.

(c) Zeigen Sie, dass jedes Primelement entweder zu 2 oder zu 3 assoziiert ist. (Begriff *assoziiert*: Zwei Elemente $x, y \in R$ sind zueinander assoziiert, wenn es eine Einheit u gibt mit $x = uy$.)

Lösung:

zu (a) Wir zeigen, dass die Einheitengruppe $R^\times$ mit der Menge

$$T \quad = \quad \{q \in \mathbb{Q} \mid \exists\, a,b \in \mathbb{Z} : q = \frac{a}{b} \text{ und } 2 \nmid a,b \text{ und } 3 \nmid a,b\}$$

übereinstimmt. Ist $q \in T$, $q = \frac{a}{b}$ mit $a,b \in \mathbb{Z}$, $2 \nmid a,b$ und $3 \nmid a,b$, dann gilt insbesondere $b \neq 0$, und das Element $q^{-1} = \frac{b}{a}$ ist ebenfalls in R enthalten. Wegen $qq^{-1} = 1$ ist damit $q \in R^\times$ nachgewiesen.

Sei nun umgekehrt $\alpha \in R^\times$ vorgegeben, $\alpha = \frac{a}{b}$ mit $a,b \in \mathbb{Z}$ und $2 \nmid b$, $3 \nmid b$. Wegen $\alpha \in R^\times$ gibt es ein $\beta \in R$ mit $\alpha\beta = 1$. Das Element β besitzt eine Darstellung der Form $\beta = \frac{c}{d}$ mit $c,d \in \mathbb{Z}$, $2 \nmid d$, $3 \nmid d$. Aus $\frac{ac}{bd} = \alpha\beta = 1$ folgt $ac = bd$. Wäre 2 ein Teiler von a, dann würde auf Grund der Gleichung $2 \mid (bd)$ folgen, und wegen $2 \nmid d$ würden wir $2 \mid b$ erhalten, was aber ausgeschlossen ist. Also gilt $2 \nmid a$, und mit demselben Argument kann auch $3 \nmid a$ gezeigt werden. Insgesamt gilt also $2 \nmid a,b$ und $3 \nmid a,b$ und damit $\alpha \in T$. Damit ist der Beweis von $R^\times = T$ abgeschlossen.

zu (b) Zunächst zeigen wir, dass 2 in R keine Einheit ist. Wäre dies der Fall, dann hätte das Element 2 nach Teil (a) eine Darstellung der Form $2 = \frac{a}{b}$ mit $a,b \in \mathbb{Z}$, $2 \nmid a,b$ und $3 \nmid a,b$. Aber die Gleichung $2 = \frac{a}{b}$ impliziert $a = 2b$, und daraus folgt $2 \mid a$. Die Annahme, dass 2 in R eine Einheit ist, hat also zu einem Widerspruch geführt. Um zu zeigen, dass 2 ein Primelement ist, seien nun $\alpha, \beta \in R$ mit $2 \mid \alpha\beta$ vorgegeben. Dann gibt es ein Element $\gamma \in R$ mit $2\gamma = \alpha\beta$. Die Elemente α, β haben Darstellungen $\alpha = \frac{a}{b}$, $\beta = \frac{c}{d}$, $\gamma = \frac{u}{v}$ mit $a,b,c,d,u,v \in \mathbb{Z}$, $2 \nmid b,d,v$ und $3 \nmid b,d,v$. Durch Umstellen der Gleichung

$$2\frac{u}{v} \quad = \quad 2\gamma \quad = \quad \alpha\beta \quad = \quad \frac{ac}{bd}$$

erhalten wir $acv = 2ubd$. Die Gleichung zeigt, dass einer der Faktoren a,c,v durch 2 teilbar ist. Wegen $2 \nmid v$ folgt $2 \mid a$ oder $2 \mid c$. Es gibt also ein $a' \in \mathbb{Z}$ mit $a = 2a'$ oder ein $c' \in \mathbb{Z}$ mit $c = 2c'$. Im Fall $\alpha = \frac{a}{b} = 2\frac{a'}{b}$ gilt $2 \mid \alpha$, im Fall $\beta = \frac{c}{d} = 2\frac{c'}{d}$ gilt $2 \mid \beta$ im Ring R. Insgesamt ist damit die Implikation $2 \mid (\alpha\beta) \Rightarrow (2 \mid \alpha) \vee (2 \mid \beta)$ bewiesen, und somit ist 2 tatsächlich in R ein Primelement. Der Nachweis, dass 3 in R ein Primelement, läuft wortwörtlich genauso, es muss lediglich die Zahl 2 überall durch 3 ersetzt werden.

zu (c) Sei π ein Primelement in R, $\pi = \frac{a}{b}$ mit $a,b \in \mathbb{Z}$, $2 \nmid b$ und $3 \nmid b$. Als Primelement ist π in R insbesondere irreduzibel. Betrachten wir zunächst den Fall, dass a von $4 = 2^2$ geteilt wird. Dann gibt es ein $c \in \mathbb{Z}$ mit $a = 2^2 c$, und wir erhalten für π die Produktdarstellung $\pi = \frac{2^2 c}{b} = 2 \cdot (2\frac{c}{b})$. Als Primelement ist 2 in R keine Einheit, und $2\frac{c}{b}$ ist als Vielfaches vom Primelement 2 ebenfalls keine Einheit. Also ist π als Produkt von zwei Nicht-Einheiten darstellbar, was aber der Irreduzibilität von π widerspricht. Genauso schließt man aus, dass a durch $9 = 3^2$ teilbar ist.

Ebenso ist a nicht zugleich durch 2 oder durch 3 teilbar, denn dann gäbe es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $a = 6c$, und durch $\pi = 2 \cdot (3\frac{c}{b})$ wäre erneut eine Zerlegung von π in zwei Nicht-Einheiten gegeben. Andererseits darf auch nicht zugleich $2 \nmid a$ und $3 \nmid a$ gelten, denn dann wäre $\pi = \frac{a}{b}$ nach Teil (a) eine Einheit.

Also ist a entweder genau einmal durch 2 oder genau einmal durch 3 teilbar. Es gibt also ein $c \in \mathbb{Z}$ mit $a = 2c$ oder $a = 3c$, wobei außerdem $2 \nmid c$ und $3 \nmid c$ gilt. Daraus folgt $\pi = 2 \cdot \frac{c}{b}$ oder $\pi = 3 \cdot \frac{c}{b}$. Das Element $\frac{c}{b}$ ist nach (a) eine Einheit in R, also ist π tatsächlich zu 2 oder 3 assoziiert.