**Aufgabe F12T1A2** (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass in der symmetrischen Gruppe $S_5$ alle Untergruppen der Ordnung 8 zur Diedergruppe $D_4$ (der Symmetriegruppe eines Quadrats) isomorph sind.

*Lösung:*

zu (a) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Diedergruppe $D_4$ als achtelementige Untergruppe von $S_4$ aufgefasst werden kann, und zwar in der Form $D_4 = \langle \rho, \sigma \rangle$ ist, mit $\rho = (1\ 2\ 3\ 4)$ und $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)$. (Dabei identifiziert man jede Symmetrieoperation auf dem Viereck mit der zugehörigen Permutation der Eckpunkte, die der Reihe nach gegen den Uhrzeigersinn mit den Zahlen $1, 2, 3, 4$ durchnummeriert sind. Das Element $\rho$ entspricht dann der $90°$-Drehung gegen den Uhrzeigersinn, und $\sigma$ entspricht der Spiegelung bezüglich der Achse, die durch die Mitten der beiden gegenüberliegenden Seiten mit den Eckpunkten 1 und 2 bzw. 3 und 4 durchläuft.) Außerdem ist bekannt, dass für alle $m, n$ mit $m \leq n$ die symmetrische Gruppe $S_m$ isomorph zu einer Untergruppe von $S_n$ ist. Insbesondere existiert also ein Isomorphismus $\phi : S_4 \to U$ zwischen $S_4$ und einer Untergruppe $U \leq S_5$, und folglich ist $\phi(D_4)$ eine zu $D_4$ isomorphe Untergruppe von $S_5$.

Wegen $|S_5| = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ sind die 2-Sylowgruppen von $S_5$ gerade die Untergruppen der Ordnung $2^3 = 8$. Wegen $|\phi(D_4)| = |D_4| = 8$ ist $\phi(D_4)$ eine 2-Sylowgruppe von $S_5$. Sei nun $P$ eine beliebige 2-Sylowgruppe von $S_5$. Da je zwei 2-Sylowgruppen von $S_5$ zueinander konjugiert sind, gilt dies insbesondere für $P$ und $\phi(D_4)$. Weil zueinander konjugierte Untergruppen isomorph sind, gilt $P \cong \phi(D_4) \cong D_4$.