Aufgabe F12T1A1 (6 Punkte)

Das Zentrum einer Gruppe G ist die Menge $Z(G) = \{a \in G \mid \forall\, b \in G : ab = ba\}$. Bestimmen Sie das Zentrum der orthogonalen Gruppe $\mathcal{O}(2,\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid {}^{\mathrm{t}}AA = E_2\}$ über den reellen Zahlen.

Lösung:

Sei A ein beliebiges Element in $\in Z(\mathcal{O}(2,\mathbb{R}))$,

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Die Matrix

$$B \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ist in $\mathcal{O}(2,\mathbb{R})$ enthalten, denn es gilt

$${}^{\mathrm{t}}BB \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad = \quad E_2.$$

Wegen $A \in Z(\mathcal{O}(2,\mathbb{R}))$ gilt $AB = BA$, und daraus folgt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$
$$b = -b \text{ und } c = -c \quad \Leftrightarrow \quad b = c = 0$$

also

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Die Matrix

$$C \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist ebenso ein Element von $\mathcal{O}(2,\mathbb{R})$, denn es gilt

$${}^{\mathrm{t}}CC \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad = \quad E_2.$$

Wegen $A \in Z(\mathcal{O}(2,\mathbb{R}))$ gilt auch $AC = CA$, und wir erhalten

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -a \\ d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -d \\ a & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad a = d$$

also

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Wegen $A \in Z(\mathcal{O}(2,\mathbb{R}))$ liegt A insbesondere in $\mathcal{O}(2,\mathbb{R})$, und daraus folgt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2 = {}^{\mathrm{t}}AA = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad a^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a \in \{\pm 1\}.$$

Damit ist insgesamt $A \in \{\pm E_2\}$, also $Z(\mathcal{O}(2,\mathbb{R})) \subseteq \{\pm E_2\}$ nachgewiesen. Umgekehrt liegen die beiden Matrizen $\pm E_2$ offenbar in $Z(\mathcal{O}(2,\mathbb{R}))$, denn für jede 2×2-Matrix B über $\mathbb{R}$ gilt $BE_2 = B = E_2B$ und $B(-E_2) = -B = (-E_2)B$, erst recht also für alle $B \in \mathcal{O}(2,\mathbb{R})$. Also gilt $Z(\mathcal{O}(2,\mathbb{R})) = \{\pm E_2\}$.