Gruppen der Ordnung 2015

Aufgabe

Sei G eine Gruppe der Ordnung $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. Zeigen Sie:

(a) G besitzt einen zyklischen Normalteiler N der Ordnung 403.

(b) G ist inneres semidirektes Produkt von N und einer Untergruppe der Ordnung 5.

(c) Es gibt eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 2015.

(d) Es gibt bis auf Isomorphie genau zwei Gruppen der Ordnung 2015.

<u>zu (a)</u> Für jede Primzahl p sei ν_p die Anzahl der p-Sylowgruppen von G. Es gilt $\nu_{31} \mid (5 \cdot 13)$, also $\nu_{31} \in \{1, 5, 13, 65\}$, außerdem $\nu_{31} \equiv 1 \bmod 31$. Wegen $5 \not\equiv 1 \bmod 31$, $13 \not\equiv 1 \bmod 31$ und $65 \equiv 2 \not\equiv 1 \bmod 31$ folgt $\nu_{31} = 1$. Ebenso gilt $\nu_{13} \mid (5 \cdot 31)$, also $\nu_{13} \in \{1, 5, 31, 5 \cdot 31\}$, außerdem $\nu_{13} \equiv 1 \bmod 13$. Wegen $5 \not\equiv 1 \bmod 13$, $31 \equiv 5 \not\equiv 1 \bmod 13$ und $5 \cdot 31 \equiv 5 \cdot 5 \equiv 12 \not\equiv 1 \bmod 13$ gilt $\nu_{13} = 1$. (Die Betrachtung von ν_5 liefert hier keine verwertbare Information.)

Sei nun U die einzige 13- und V die einzige 31-Sylowgruppe von G. Auf Grund der Sylowsätze sind U und V beides Normalteiler von G. Also ist auch das Komplexprodukt $N = UV$ ein Normalteiler von G. Wir zeigen, dass N ein inneres direktes Produkt von U und V ist. Es gilt $|U| = 13$ und $|V| = 31$, denn dies sind jeweils die höchsten Primzahlpotenzen, welche die Ordnung von G teilen. Weil 13 und 31 teilerfremd sind, gilt $U \cap V = \{e\}$. Als Normalteiler von G sind U und V auch Normalteiler von N. Außerdem ist N nach Definition das Komplexprodukt von U und V.

Damit sind alle Eigenschaften eines inneren direkten Produkts nachgewiesen. Es folgt $N \cong U \times V$. Als Gruppen von Primzahlordnung sind U und V zyklisch, also $U \cong \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ und $V \cong \mathbb{Z}/31\mathbb{Z}$. Weil 13 und 31 teilerfremd sind, erhalten wir mit dem Chinesischen Restsatz $G \cong \mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/31\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/403\mathbb{Z}$. Insgesamt ist N also ein zyklischer Normalteiler der Ordnung 403 von G.

<u>zu (b)</u> Sei U eine beliebige 5-Sylowgruppe von G. Wegen $5 \mid |G|$, $5^2 \nmid |G|$ gilt $|U| = 5$. Wir zeigen nun, dass G ein inneres semidirektes Produkt von N und U ist. Dazu müssen wir die Bedingungen $N \cap U = \{e\}$ und $NU = G$ überprüfen.

Die Bedingung $N \cap U = \{e\}$ ist erfüllt, weil die Ordnungen $|N| = 403$ und $|U| = 5$ teilerfremd sind. Das Komplexprodukt NU ist wegen $N \trianglelefteq G$ jedenfalls eine Untergruppe von G. Wegen $N \subseteq NU$ und $U \subseteq NU$ gilt $403 \mid |NU|$ und $5 \mid |NU|$. Wiederum auf Grund der Teilerfremdheit von 403 und 5 folgt $2015 \mid |NU|$, insbesondere gilt $|NU| \geq 2015 = |G|$. Zusammen mit $NU \subseteq G$ folgt daraus $G = NU$.

<u>zu (c)</u> Wir konstruieren ein nicht-abelsches semidirektes Produkt der beiden zyklischen Gruppen $\mathbb{Z}/403\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Dazu benötigen wir einen nichttrivialen Homomorphismus $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/403\mathbb{Z})$. Auf Grund des Chinesischen Restsatzes und der Teilerfremdheit von 13 und 31 gilt
$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/403\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/403\mathbb{Z})^\times \cong (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/31\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$.
Weil $(\bar{0}, \bar{6})$ in $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ ein Element der Ordnung 5 ist, gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\psi : \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ mit $\psi(\bar{1}) = (\bar{0}, \bar{6})$. Wegen $(\bar{0}, \bar{6}) \neq (\bar{0}, \bar{0})$ ist diese nichttrivial. Durch Komposition mit dem Isomorphismus $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/403\mathbb{Z})$ erhalten wir einen nichttrivialen Homomorphismus $\varphi : \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/403\mathbb{Z})$. Damit ist $\mathbb{Z}/403\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung $403 \cdot 5 = 2015$.

<u>zu (d)</u> Sei G eine Gruppe der Ordnung 2015. Nach Teil (b) ist G ein inneres semidirektes Produkt eines zyklischen Normalteilers N der Ordnung 403 und einer Untergruppe U der Ordnung 5. Als Gruppe von Primzahlordnung ist auch U zyklisch, insgesamt gilt also $U \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ und $N \cong \mathbb{Z}/403\mathbb{Z}$. Bezeichnen wir den Homomorphismus $U \to \mathrm{Aut}(N)$ gegeben durch die Operation von U auf N durch Konjugation mit ϕ, dann gilt $G \cong N \rtimes_\phi U$.

Wir unterscheiden nun zwei Fälle. Ist ϕ trivial, dann folgt $G \cong N \times U = \mathbb{Z}/403\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ und auf Grund der Teilerfremdheit von 403 und 5 mit dem Chinesischen Restsatz $G \cong \mathbb{Z}/2015\mathbb{Z}$. In diesem Fall ist G also zyklisch.

Setzen wir nun voraus, dass ϕ nichttrivial ist. Wegen $|U| = 5$ ist das Bild $\phi(U)$ dann eine 5-elementige Untergruppe von $\mathrm{Aut}(N)$. Sei nun $\beta : \mathbb{Z}/403\mathbb{Z} \to N$ ein beliebig gewählter Isomorphismus und $\tilde{\beta} : \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/403\mathbb{Z}) \to \mathrm{Aut}(N)$ der durch β induzierte Isomorphismus. Sei außerdem $\varphi : \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/403\mathbb{Z})$ der Homomorphismus aus

Teil (c). Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"', "\cong"] & \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/403\mathbb{Z}) \arrow[d, "\tilde{\beta}", "\cong"'] \\ U \arrow[r, "\phi"] & \mathrm{Aut}(N) \end{tikzcd}$$

Wegen $\mathrm{Aut}(N) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/403\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ ist $\mathrm{Aut}(N)$ abelsch von Ordnung $12 \cdot 30 = 360$. Wegen $5 \mid 360$, $5^2 \nmid 360$ enthält $\mathrm{Aut}(N)$ genau eine Untergruppe der Ordnung 5, dies ist $\phi(U)$. Aus demselben Grund ist $\varphi(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ die eindeutig bestimmte Untergruppe der Ordnung 5 von $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/403\mathbb{Z})$. Auf Grund der Eindeutigkeit wird $\varphi(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ vom Isomorphismus $\tilde{\beta}$ auf $\phi(U)$ abgebildet. Betrachten wir nun φ und ϕ als Isomorphismen zwischen $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ auf $\varphi(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ bzw. U und $\phi(U)$ und setzen $\alpha = \hat{\phi}^{-1} \circ \hat{\beta} \circ \varphi$, dann gilt $\hat{\beta} \circ \varphi = \phi \circ \alpha$. Daraus folgt $G \cong N \rtimes_\phi U \cong \mathbb{Z}/403\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Insgesamt sind $\mathbb{Z}/2015\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/403\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ also bis auf Isomorphie die einzigen Gruppen der Ordnung 2015. Sie sind nicht isomorph, weil die erste Gruppe zyklisch und die zweite nicht-zyklisch (nicht einmal abelsch) ist.