Gruppen der Ordnung 2014

Aufgabe

Ziel dieser Aufgabe ist die Klassifikation der Gruppen der Ordnung $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$.

(a) Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung 2014 ein inneres semidirektes Produkt einer zyklischen Untergruppe der Ordnung 2 und eines zyklischen Normalteilers der Ordnung 1007 ist.

(b) Beweisen Sie, dass es bis auf Isomorphie höchstens vier Gruppen der Ordnung 2014 gibt.

(c) Beweisen Sie, dass es bis auf Isomorphie genau vier Gruppen der Ordnung 2014 gibt.

zu (a) Sei G eine Gruppe der Ordnung 2014 und ν_p jeweils die Anzahl der p-Sylowgruppen von G, für $p \in \{2, 19, 53\}$. Auf Grund der Sylowsätze gilt $\nu_{19} \mid 106$, also $\nu_{19} \in \{1, 2, 53, 106\}$. Außerdem gilt $\nu_{19} \equiv 1 \mod 19$. Aus $2 \not\equiv 1 \mod 19$, $53 \equiv 15 \not\equiv 1 \mod 19$ und $106 \equiv 11 \not\equiv 1 \mod 19$ folgt $\nu_{19} = 1$. Ebenso gilt $\nu_{53} \mid 38$, also $\nu_{53} \in \{1, 2, 19, 38\}$. Wegen $2 \not\equiv 1 \mod 53$, $19 \not\equiv 1 \mod 53$ und $38 \not\equiv 1 \mod 53$ erhalten wir $\nu_{53} = 1$. (Die Anwendung der Sylowsätze auf die Primzahl $p = 2$ liefert kein neues Ergebnis.)

Sei nun P die einzige 19-, S die einzige 53-Sylowgruppe von G und $N = PS$ das Komplexprodukt der beiden Untergruppen. Wir zeigen, dass N ein zyklischer Normalteiler von G der Ordnung 1007 ist. Als einzige 19-Sylowgruppe ist P ein Normalteiler von G, und aus demselben Grund ist auch S ein Normalteiler. Daraus folgt, dass das Komplexprodukt $N = PS$ jedenfalls ein Normalteiler von G ist. Auch S ist als einzige 53-Sylowgruppe ein Normalteiler von G. Aus $P \trianglelefteq G$ und $S \trianglelefteq G$ folgt $P \trianglelefteq N$ und $S \trianglelefteq N$. Weil $|P| = 19$ und $|S| = 53$ teilerfremd sind, gilt $P \cap S = \{e\}$. Insgesamt haben wir damit nachgewiesen, dass $N = PS$ ein inneres direktes Produkt von P und S ist. Daraus folgt

$$N \quad \cong \quad P \times S.$$

Als Gruppe von Primzahlordnung sind P und S zyklisch. Es gilt also $P \cong \mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$, $S \cong \mathbb{Z}/53\mathbb{Z}$ und somit $U \cong \mathbb{Z}/19\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/53\mathbb{Z}$. Weil 19 und 53 als verschiedene Primzahlen teilerfremd sind, kann der Chinesische Restsatz angewendet werden, und wir erhalten $U \cong \mathbb{Z}/1007\mathbb{Z}$. Insbesondere ist U zyklisch.

Sei U eine beliebige 2-Sylowgruppe von G. Als Gruppe von Primzahlordnung ist auch U zyklisch. Wir zeigen nun, dass G ein inneres semidirektes Produkt von U und N ist. Jedenfalls ist U eine Untergruppe, und N ist ein Normalteiler von G, wie bereits gezeigt wurde. Weil $|U| = 2$ und $|N| = 1007$ teilerfremd sind, gilt $U \cap N = \{e\}$. Also ist UN ein inneres semidirektes Produkt von U und N. Wegen $U \subseteq UN$ ist 2 ein Teiler von $|UN|$, und wegen $N \subseteq UN$ ist 1007 ebenfalls ein Teiler der Ordnung von UN. Wiederum auf Grund der Teilerfremdheit der beiden Zahlen kommen wir zu dem Ergebnis, dass $2014 = 2 \cdot 1007$ ein Teiler von $|UN|$ ist. Aus $UN \subseteq G$ und $|UN| \geq 2014 = |G|$ folgt $G = UN$. Also ist G ein inneres semidirektes Produkt von U und N.

zu (b) Sei G eine Gruppe der Ordnung 2014, und seien U und N die Untergruppen aus Aufgabenteil (a). Als inneres semidirektes Produkt der Gruppen U und N ist G laut Vorlesung isomorph zu einem äußeren semidirekten Produkt der Form $N \rtimes_\phi U$, wobei ϕ einen Homomorphismus $U \to \mathrm{Aut}(N)$ bezeichnet. Es gilt $U \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $N \cong \mathbb{Z}/1007\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/19\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/53\mathbb{Z}$, also

$$\mathrm{Aut}(N) \quad \cong \quad \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/1007\mathbb{Z}) \quad \cong \quad (\mathbb{Z}/1007\mathbb{Z})^\times \quad \cong \quad (\mathbb{Z}/19\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/53\mathbb{Z})^\times \quad \cong \quad \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/52\mathbb{Z}.$$

Die Anzahl der Homomorphismen $U \to \mathrm{Aut}(N)$ stimmt also mit der Anzahl der Homomorphismen $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/52\mathbb{Z}$ überein. Ist $\psi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/52\mathbb{Z}$ ein Homomorphismus, dann muss $\psi(\bar{1})$ wegen $\mathrm{ord}(\bar{1}) = 2$ ein Element der Ordnung 1 oder 2 sein. Ist umgekehrt $\alpha \in \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/52\mathbb{Z}$ ein Element der Ordnung 1 oder 2, dann gibt es laut Vorlesung einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\psi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/52\mathbb{Z}$ mit $\psi(\bar{1}) = \alpha$. Dies zeigt, dass die Anzahl der Homomorphismen $U \to \mathrm{Aut}(N)$ mit der Anzahl der Element der Ordnung 1 oder 2 in $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/52\mathbb{Z}$ übereinstimmt. Ein Element $\alpha = (\bar{b}, \bar{c})$ in $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/52\mathbb{Z}$ ist genau dann von Ordnung 1 oder 2, wenn $\mathrm{ord}(\bar{b}) \in \{1, 2\}$ und $\mathrm{ord}(\bar{c}) \in \{1, 2\}$ gilt. Weil $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/52\mathbb{Z}$ zyklische Gruppe sind, gibt es jeweils genau zwei Elemente der Ordnung 1 oder 2 (nämlich $\bar{0}$ und $\bar{9}$ bzw. $\bar{0}$ und $\overline{26}$). In $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/52\mathbb{Z}$ gibt es also genau vier Elemente der Ordnung 1 oder 2, nämlich

$$(\bar{0}, \bar{0}) \quad , \quad (\bar{9}, \bar{0}) \quad , \quad (\bar{0}, \overline{26}) \quad \text{und} \quad (\bar{9}, \overline{26}).$$

Also existieren genau vier Homomorphismen $\phi : U \to \mathrm{Aut}(N)$, und es gibt vier verschiedene semidirekte Produkte der Form $N \rtimes_\phi U$. Weil jede Gruppe der Ordnung 2014 zu einem solchen semidirekten Produkt isomorph ist, kann es bis auf Isomorphie höchstens vier Gruppen der Ordnung 2014 geben.

zu (c) Wir betrachten die vier Gruppen $G_1 = \mathbb{Z}/2014\mathbb{Z}$, $G_2 = D_{19} \times \mathbb{Z}/53\mathbb{Z}$, $G_3 = \mathbb{Z}/19\mathbb{Z} \times D_{53}$ und $G_4 = D_{1007}$, wobei D_n für $n \in \{19, 53, 1007\}$ jeweils die Diedergruppe mit $2n$ Elementen bezeichnet. Nach Aufgabenteil (b) genügt es zu zeigen, dass diese vier Gruppen paarweise nicht-isomorph sind. Weil G_1 als einzige der vier Gruppen nicht-abelsch ist, kann sie nicht isomorph zu G_2, G_3 oder G_4 sein. Wir zeigen, dass die letzten drei Gruppen nicht isomorph zueinander sind, indem wir in jeder Gruppe der Anzahl der Elemente der Ordnung 2 bestimmen. In $\mathbb{Z}/53\mathbb{Z}$ gibt es keine Elemente der Ordnung 2. Deshalb ist ein Element (g, h) genau dann von Ordnung 2, wenn $\mathrm{ord}(g) = 2$ und $h = \bar{0}$ gilt. In D_{19} gibt es genau 19 Elemente der Ordnung 19. (Betrachtet man D_{19} als Symmetriegruppe des regelmäßigen 19-Ecks, dann sind das genau die Spiegelungen.) Also existieren auch in G_2 genau 19 Elemente der Ordnung 2.

Ein Element $(g, h) \in G_3$ ist genau dann von Ordnung 2, wenn $g = \bar{0}$ und $\mathrm{ord}(h) = 2$ gilt. In D_{53} gibt es genau 53 Elemente der Ordnung 53, also auch in G_3. Schließlich gibt es in G_4 genau 1007 Elemente der Ordnung 2 (alle Spiegelungen). Weil die Anzahl der Elemente der Ordnung 2 in den Gruppen G_2, G_3, G_4 verschieden ist, sind die Gruppen paarweise nicht-isomorph.

Nachtrag: Die vier Gruppen G_1, G_2, G_3, G_4 aus Aufgabenteil (c) entsprechen also den vier verschiedenen semidirekten Produkten aus Teil (b). Sei ι der Automorphismus von $\mathbb{Z}/19\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/53\mathbb{Z}$ gegeben durch $(\bar{a}, \bar{b}) \mapsto (-\bar{a}, \bar{b})$ und $\phi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/19\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/53\mathbb{Z})$ der eindeutig bestimmte Homomorphismus mit $\phi(\bar{1}) = \iota$. Mit Hilfe der definierenden Eigenschaften der Diedergruppen kann gezeigt werden, dass

$$G_2 \quad \cong \quad (\mathbb{Z}/19\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/53\mathbb{Z}) \rtimes_\phi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \qquad \text{gilt.}$$

Dazu betrachtet man die Elemente $g = ((\bar{1}, \bar{0}), \bar{0})$, $h = ((\bar{0}, \bar{1}), \bar{0})$ und $k = ((\bar{0}, \bar{0}), \bar{1})$. Durch Rechnen im semidirekten Produkt überprüft man die Gleichungen $g^{19} = h^{53} = k^2 = e$ sowie $gh = hg$, $hk = kh$ und $gk = kg^{-1}$. Mit Hilfe dieser Gleichungen ist es dann nicht schwer, die Isomorphismen $\langle g, k \rangle \cong D_{19}$ und $(\mathbb{Z}/19\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/53\mathbb{Z}) \rtimes_\phi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong G_2$ nachzuweisen. Um das Rechnen in semidirekten Produkten noch einmal zu demonstrieren, verifizieren wir die Gleichung $gk = kg^{-1} \Leftrightarrow (gk)^2 = e$. Es gilt

$$gk = ((\bar{1}, \bar{0}), \bar{0}) \cdot ((\bar{0}, \bar{0}), \bar{1}) = ((\bar{1}, \bar{0}) + \phi(\bar{0})(\bar{0}, \bar{0}), \bar{0} + \bar{1}) = ((\bar{1}, \bar{0}) + (\bar{0}, \bar{0}), \bar{1}) = ((\bar{1}, \bar{0}), \bar{1})$$

und

$$(gk)^2 = ((\bar{1}, \bar{0}), \bar{1}) \cdot ((\bar{1}, \bar{0}), \bar{1}) = ((\bar{1}, \bar{0}) + \phi(\bar{1})(\bar{1}, \bar{0}), \bar{1} + \bar{1}) = ((\bar{1}, \bar{0}) + \iota(\bar{1}, \bar{0}), \bar{0}) =$$
$$((\bar{1}, \bar{0}) + (-\bar{1}, \bar{0}), \bar{0}) = ((\bar{0}, \bar{0}), \bar{0}) = e.$$