Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: __________		
Kennwort: __________	**Frühjahr 2015**	**63912**
Arbeitsplatz-Nr.: _______		

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen
— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 5

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Sei $\mathbb{F}_2$ der endliche Körper mit genau zwei Elementen 0 und 1. Auf dem dreidimensionalen $\mathbb{F}_2$-Vektorraum $(\mathbb{F}_2)^3$ betrachten wir den Endomorphismus

$$\phi : (\mathbb{F}_2)^3 \to (\mathbb{F}_2)^3, \qquad (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_3, x_2, x_1).$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von ϕ. Bestimmen Sie alle Eigenwerte von ϕ in $\mathbb{F}_2$. Bestimmen Sie für jeden Eigenwert von ϕ in $\mathbb{F}_2$ eine Basis des zugehörigen Eigenraums.
(8 Punkte)

b) Gibt es eine Basis von $(\mathbb{F}_2)^3$, bezüglich derer ϕ eine Jordan'sche Normalform hat? Begründen Sie Ihre Antwort. Wenn ja, bestimmen Sie die Jordan'sche Normalform von ϕ.
(8 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei $m \geq 3$ eine ungerade ganze Zahl. Zeigen Sie die folgende Kongruenz:

$$1^m + 2^m + 3^m + \ldots + (m-3)^m + (m-2)^m + (m-1)^m \equiv 0 \pmod{m}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei G eine Gruppe der Ordnung 105. Zeigen Sie:

a) G hat einen Normalteiler N mit $\#N = 5$ oder $\#N = 7$. (6 Punkte)

b) G ist auflösbar. (6 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei J das von $X^3 - 7$ erzeugte Ideal in $\mathbb{Q}[X]$.

a) Beweisen Sie, dass $\mathbb{Q}[X]/J$ ein Körper ist, und bestimmen Sie den Grad der Körpererweiterung $\mathbb{Q}[X]/J \supset \mathbb{Q}$. (6 Punkte)

b) Bestimmen Sie ein Polynom $P \in \mathbb{Q}[X]$, für das $P + J$ multiplikatives Inverses von $(X^2+1)+J$ in $\mathbb{Q}[X]/J$ ist. (6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Sei $f \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad $n \geq 1$. Sei K ein Zerfällungskörper von f. Sei $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ die zugehörige Galoisgruppe.

a) Beweisen Sie: Falls G eine abelsche Gruppe ist, hat sie die Ordnung n. (8 Punkte)

b) Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$, wobei $i \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$ ist. Bestimmen Sie ein irreduzibles Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$, dessen Zerfällungskörper K ist. Beweisen Sie, dass $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ abelsch, aber nicht zyklisch ist. (8 Punkte)

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Man bestimme alle Paare von Primzahlen p, q mit $p^2 - 2q^2 = 1$. (10 Punkte)

Aufgabe 2:
Es sei $f(X) \in K[X]$ ein nicht konstantes Polynom ohne mehrfache Nullstellen in einem Zerfällungskörper. Man zeige, dass $f(X)$ ein Teiler des Polynoms $f(X + f(X))$ ist.
(10 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei p eine Primzahl und $a \in \mathbb{Z}$ keine p–te Potenz in $\mathbb{Z}$. Man zeige, dass das Polynom $X^p - a$ über $\mathbb{Q}$ irreduzibel ist.
(Hinweis: Betrachte die Nullstellen von $X^p - a$ in $\mathbb{C}$ und untersuche den konstanten Term eines echten Teilers von $X^p - a$ auf Ganzzahligkeit.) (12 Punkte)

Aufgabe 4:

a) Die Gruppe G operiere transitiv auf einer Menge Ω mit $|\Omega| > 1$. Man zeige: Hat jedes Element aus G mindestens einen Fixpunkt, dann ist G eine Vereinigung der Konjugierten hUh^{-1}, $h \in G$, einer echten Untergruppe U von G. (8 Punkte)

b) Für $n > 1$ sei $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ die Gruppe der invertierbaren $n \times n$-Matrizen über den komplexen Zahlen. Man gebe eine echte Untergruppe U von G an, so dass G die Vereinigung der Konjugierten von U ist. (Hinweis: Betrachte die Operation von G auf den 1–dimensionalen Unterräumen von $\mathbb{C}^n$.) (10 Punkte)

Aufgabe 5:
Sei p eine Primzahl und $q = p^n$, $n > 0$. Weiter sei K ein Körper der Charakteristik p. Zeigen Sie, dass die Nullstellen des Polynoms $f(X) = X^q - X$ einen Unterkörper von K bilden.
(10 Punkte)

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Gegeben seien eine Gruppe G und drei Untergruppen $U_1, U_2, V \subseteq G$ mit der Eigenschaft $V \subseteq U_1 \cup U_2$. Zeigen Sie, dass $V \subseteq U_1$ oder $V \subseteq U_2$ gilt. (8 Punkte)

Aufgabe 2:
Seien p, q, r Primzahlen mit $p < q < r$ und $pq < r + 1$. Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung pqr auflösbar ist. (12 Punkte)

Aufgabe 3:
Ein Ring R mit Eins heißt *idempotent*, wenn $a \cdot a = a$ für alle $a \in R$ gilt. Beweisen Sie:

a) $-1 = 1$ in R. (4 Punkte)

b) Jeder idempotente Ring ist kommutativ. (4 Punkte)

c) Jeder idempotente Integritätsbereich ist isomorph zu $\mathbb{F}_2$, dem Körper mit zwei Elementen. (4 Punkte)

Aufgabe 4:
Im Folgenden ist jeweils L/K eine Körpererweiterung und ein Element $\alpha \in L$ gegeben. Bestimmen Sie jeweils das Minimalpolynom von α über dem Grundkörper K (mit Nachweis!).

a) $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{C}$ und $\alpha := \sqrt{2} + \sqrt{3}$. (4 Punkte)

b) $K = \mathbb{F}_3$, $L = \overline{\mathbb{F}}_3$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{F}_3$ und α eine Nullstelle von $X^6 + 1$. (6 Punkte)

c) $K = \mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$, $L = \mathbb{Q}(\zeta)$ und $\alpha = \zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive p-te Einheitswurzel, wobei $p \geq 3$ eine Primzahl bezeichne. (6 Punkte)

Aufgabe 5:
Es sei eine Galoiserweiterung E/K mit zyklischer Galoisgruppe gegeben, so dass $[E : K] = p^n$ gilt mit einer Primzahl p und $n \geq 1$. Weiter sei $K \subset F \subset E$ ein Zwischenkörper mit $[F : K] = p^{n-1}$. Zeigen Sie: Jedes Element von $E \setminus F$ ist ein primitives Element von E über K.

(12 Punkte)

Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ________ Kennwort: ________ Arbeitsplatz-Nr.: ________	**Herbst 2015**	**63911**

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 4

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie sämtliche Lösungen der Gleichung $x^6 - 2x + 4 = 0$ im Ring $\mathbb{Z}/64\mathbb{Z}$. (8 Punkte)
Tipp: Führen Sie eine Fallunterscheidung je nach Bild von x in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ durch und beachten Sie, dass $64 = 2^6$.

Aufgabe 2:
Sei $\mathbb{F}_q$ der endliche Körper mit q Elementen.

a) Zeigen Sie, dass für $n \geq 1$ die Anzahl der eindimensionalen $\mathbb{F}_q$-Untervektorräume von $\mathbb{F}_q^n$ gleich $\frac{q^n-1}{q-1}$ ist. (4 Punkte)
b) Zeigen Sie, dass die Anzahl der zweidimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{F}_q^3$ gleich der Anzahl der eindimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{F}_q^3$ ist. (4 Punkte)
c) Wie viele Zerlegungen von $\mathbb{F}_q^3$ in direkte Summen von $\mathbb{F}_q$-Untervektorräumen $V_1 \oplus V_2$ gibt es mit $\dim_{\mathbb{F}_q}(V_1) = 2$? (4 Punkte)

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie bis auf Isomorphie sämtliche endliche Gruppen G der Ordnung $143 = 11 \cdot 13$.
(8 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei $P(X)$ das Polynom $X^3 - X + 2 \in \mathbb{Z}[X]$. Zeigen Sie die folgenden Behauptungen:

a) Das Bild von $P(X)$ in $\mathbb{F}_3[X]$ ist irreduzibel. (2 Punkte)
b) Das Polynom $P(X)$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$. (2 Punkte)
c) Das Polynom $P(X)$ hat genau eine reelle Nullstelle. (4 Punkte)
d) Die Galoisgruppe des Zerfällungskörpers L von $P(X)$ über $\mathbb{Q}$ ist isomorph zu S_3.
(4 Punkte)

Aufgabe 5:
Sei $\zeta_5 \in \mathbb{C}$ eine primitive fünfte Einheitswurzel, $\zeta_7 \in \mathbb{C}$ eine primitive siebte Einheitswurzel und $u = \zeta_7 + \zeta_7^{-1}$. Zeigen Sie:

a) $[\mathbb{Q}(\zeta_7) : \mathbb{Q}(u)] = 2$, (4 Punkte)
b) $[\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}] = 3$, (4 Punkte)
c) $[\mathbb{Q}(u, \zeta_5) : \mathbb{Q}] = 12$. (6 Punkte)
d) Die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(u, \zeta_5)/\mathbb{Q})$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. (6 Punkte)

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie alle Matrizen A in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, die mit der Matrix

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kommutieren. (6 Punkte)

Aufgabe 2:
Wieviele Elemente der Ordnung 15 gibt es in der symmetrischen Gruppe S_8? (14 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ die wie folgt rekursiv definierte Folge ganzer Zahlen:

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = a_n^2 + 1 \text{ für } n \geq 0.$$

Sei $N \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie: Ist N ein Teiler von a_n, dann teilt N auch a_{kn} für alle $k \geq 2$.

(14 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung und seien $\alpha, \beta \in L$ algebraisch über K. Sei f das Minimalpolynom von α über K und g das Minimalpolynom von β über K. Zeigen Sie, dass f irreduzibel über $K(\beta)$ ist genau dann, wenn g irreduzibel über $K(\alpha)$ ist. (12 Punkte)

Aufgabe 5:
Sei $\xi = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie das Minimalpolynom $m(X)$ von ξ über $\mathbb{Q}$. (6 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass die Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2 + \sqrt{2}})$ Galois'sch ist und berechnen Sie die Galoisgruppe. (8 Punkte)

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Seien $x, y, z \in \mathbb{Z}$ mit $x^2 + y^2 = z^2$. Zeigen Sie, dass das Produkt xyz durch 60 teilbar ist.

(12 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Es bezeichne $\varphi(n)$ den Wert der Euler'schen φ-Funktion bei n. Zeigen Sie, dass es genau $\varphi(n)$ verschiedene injektive Gruppenhomomorphismen $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ gibt.

(15 Punkte)

Aufgabe 3:
Betrachten Sie das Polynom $f(X) = X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_5[X]$.

a) Zeigen Sie, dass $K := \mathbb{F}_5[X]/(f(X))$ ein Körper mit 25 Elementen ist. (4 Punkte)

b) Bestimmen Sie ein Element $w \in K$, mit $w^2 = 2$. (6 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{F}_5)$$

über K diagonalisierbar ist. (5 Punkte)

Aufgabe 4:
Es sei $p \geq 3$ eine Primzahl und $a \in \mathbb{Q}$ eine rationale Zahl, so dass $X^p - a$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist. Ferner sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive p-te Einheitswurzel, $\alpha \in \mathbb{C}$ eine beliebige Nullstelle von $X^p - a$ und $Z := \mathbb{Q}(\alpha, \zeta)$.

a) Zeigen Sie, dass Z ein Zerfällungskörper von $X^p - a$ ist und $[Z : \mathbb{Q}] = p(p-1)$ gilt.

(5 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Gal}(Z|\mathbb{Q})$ eine p-Sylowgruppe H besitzt, die ein Normalteiler ist, und dass

$$\mathrm{Gal}(Z|\mathbb{Q})/H \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\} \; gilt.$$

(5 Punkte)

c) Bestimmen Sie einen Gruppenisomorphismus $\mathrm{Gal}(Z|\mathbb{Q}(\alpha)) \xrightarrow{\cong} (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$. (5 Punkte)

d) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Gal}(Z|\mathbb{Q})$ mehr als eine 2-Sylowgruppe besitzt. (3 Punkte)

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Es sei f ein Endomorphismus des Euklidischen Vektorraums $\mathbb{R}^n$, und es sei M die Matrix von f bezüglich der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen zueinander äquivalent sind:

a) f ist eine Orthogonalprojektion auf einen Unterraum der Dimension k.

b) Die Matrix M ist idempotent (d.h. $M^2 = M$), symmetrisch und hat Spur k.

(12 Punkte)

Aufgabe 2:

Es sei $n \geqslant 1$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{n} k^2$ genau dann durch n teilbar ist, wenn n weder durch 2 noch durch 3 teilbar ist.

$$\left(\textit{Hinweis: } \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$$

(8 Punkte)

Aufgabe 3:

Es sei $(A, +)$ eine abelsche Gruppe, und es sei $(H, \cdot)$ eine Gruppe mit einem Normalteiler $N \trianglelefteq H$ vom Index 2. Zeigen Sie:

a) Sind $x, y \in H \setminus N$, dann ist $xy \in N$.

b) Die auf $A \times H$ definierte Verknüpfung

$$(a, x) \circledast (b, y) := \begin{cases} (a + b, xy), & \text{falls } x \in N, \\ (a - b, xy), & \text{falls } x \in H \setminus N, \end{cases}$$

ist assoziativ.

Im Folgenden darf ohne Beweis benutzt werden, dass $A \times H$ mit dieser Verknüpfung eine Gruppe mit neutralem Element $(0_A, 1_H)$ bildet.

c) Ist $x \in H \setminus N$ der Ordnung 2, und ist $a \in A$, dann hat (a, x) in der Gruppe $(A \times H, \circledast)$ die Ordnung 2.

d) Es gibt eine Gruppe der Ordnung 42, die weder ein Element der Ordnung 6 noch ein Element der Ordnung 14 enthält.

(16 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Es seien $1 < D \in \mathbb{Z}$ und $R = \mathbb{Z}\left[\sqrt{-D}\right]$.

a) Zeigen Sie: Die Einheitengruppe von R ist $R^* = \{\pm 1\}$.

Ferner sei $D := 13$.

b) Zeigen Sie, dass 2 und $1 + \sqrt{-13}$ in R irreduzibel sind.

c) Zeigen Sie, dass $2 \in R$ kein Primelement ist.

Hinweis: Man benutze die Normabbildung $N(a + b\sqrt{-D}) = a^2 + Db^2$. (12 Punkte)

Aufgabe 5:

Für eine primitive fünfte Einheitswurzel in $\mathbb{C}$ gilt die Formel

$$\zeta_5 := e^{\frac{2\pi i}{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{8}}\,;$$

diese Formel kann im Folgenden ohne Beweis verwendet werden.

a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\alpha := \sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{8}}$ über $\mathbb{Q}$.

b) Zeigen Sie: $i \notin \mathbb{Q}(\zeta_5)$.

(12 Punkte)

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

a) Sei p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elementen. Die Menge

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{F}_p, a \neq 0 \right\}$$

ist eine Untergruppe der $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{F}_p)$ (Nachweis nicht erforderlich). Zeigen Sie, dass G auflösbar ist.

b) Sei nun G eine beliebige Gruppe der Ordnung $p(p-1)$. Zeigen Sie, dass es genau eine Untergruppe H von G der Ordnung p gibt. Zeigen Sie weiter, dass G genau dann auflösbar ist, wenn G/H auflösbar ist.

c) Sei $C := (\mathbb{Z}/61\mathbb{Z}) \times A_5$ das direkte Produkt der zyklischen Gruppe der Ordnung 61 und der alternierenden Gruppe A_5. Ist C auflösbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

(14 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei

$$R := \mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}, \quad i^2 = -1,$$

der Ring der ganzen Gaußschen Zahlen. Sei

$$I := \mathbb{Z} \cdot 25 + \mathbb{Z}(7 + i) = \{25x + y(7 + i) \mid x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

Die Menge I ist ein Ideal in R (Nachweis nicht erforderlich).

a) Zeigen Sie, dass $\varphi \colon \mathbb{Z} \to R/I, a \mapsto a + I$, surjektiv ist und bestimmen Sie den Kern von φ.

b) Zeigen sie, dass die Gruppe $(R/I)^\times$ der Einheiten von R/I zyklisch von der Ordnung 20 ist.

c) Wie viele verschiedene Erzeuger von $(R/I)^\times$ gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort.

(12 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

Sei
$$f(x) := x^4 - 6x^2 - 14 \in \mathbb{Q}[x].$$

a) Zeigen Sie, dass $K := \mathbb{Q}(\sqrt{3+\sqrt{23}}, \sqrt{-14})$ der Zerfällungskörper von f ist.

b) Zeigen Sie: $[K : \mathbb{Q}] = 8$.

(12 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei
$$f(x) := x^3 - x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$$
und $a \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f. Sei $b := 2a^2 - a - 2$.

a) Zeigen Sie, dass f irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $b \neq 0$ gilt.

c) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von a^2 über $\mathbb{Q}$.

(12 Punkte)

Aufgabe 5:

Es sei $M_4(\mathbb{Q})$ der Ring der 4×4-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{Q}$. Sei
$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Q}).$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(x)$ sowie die Eigenwerte von A. Ist A diagonalisierbar?

b) Berechnen Sie das Ideal $J_A := \{g \in \mathbb{Q}[x] \mid g(A) = 0\}$.

(10 Punkte)

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, und $K^{n\times n}$ der K-Vektorraum der $n \times n$ Matrizen. Ferner sei $\mathrm{GL}_n(K)$ die Gruppe der invertierbaren Matrizen aus $K^{n\times n}$.

a) Sei $A \in K^{n\times n}$, und V der von den Matrizen $A^0, A^1, A^2, \dots$ erzeugte Unterraum von $K^{n\times n}$. Man zeige, dass $\dim V \leq n$.

   (*Hinweis:* Satz von Cayley–Hamilton)

b) Sei K ein endlicher Körper. Man zeige, dass jedes Element aus $\mathrm{GL}_n(K)$ höchstens die Ordnung $|K|^n - 1$ hat.

   (*Hinweis:* Für $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ vergleiche man die von A erzeugte Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(K)$ mit V.)

(12 Punkte)

Aufgabe 2:

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen ≥ 1. Man zeige:

a) $X^m - 1$ ist ein Teiler von $X^n - 1$ in $\mathbb{Q}[X]$ genau dann, wenn m ein Teiler von n ist.

b) $X^m + 1$ ist ein Teiler von $X^n + 1$ in $\mathbb{Q}[X]$ genau dann, wenn m ein Teiler von n und n/m ungerade ist.

c) Genau dann ist $X^n + 1$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$, wenn n eine Potenz von 2 ist.

   (*Hinweis*: Für eine Zweierpotenz n ist $(X+1)^n + 1$ ein Eisenstein-Polynom.)

(12 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei p eine Primzahl, die die Ordnung der endlichen Gruppe G teilt. Weiter sei P eine zyklische p-Sylowgruppe von G. Man zeige:

a) P enthält genau eine Untergruppe der Ordnung p.

b) Es gelte $|P \cap x^{-1}Px| > 1$ für alle $x \in G$. Man zeige, dass G einen Normalteiler N hat mit $|N| = p^e$ mit $e \in \mathbb{N}$.

(10 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Sei R ein Integritätsbereich und $I \subset R$ ein Primideal, so dass der Index $[R : I]$ der additiven Gruppen endlich ist. Zeigen Sie, dass I ein maximales Ideal von R ist. (11 Punkte)

Aufgabe 5:

Sei $f(X) = X^4 - 2X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Zeigen Sie, dass

$$\alpha_1 = \sqrt{1+\sqrt{3}}, \quad \alpha_2 = \sqrt{1-\sqrt{3}}, \quad \alpha_3 = -\alpha_1, \quad \alpha_4 = -\alpha_2$$

die Nullstellen von f in $\mathbb{C}$ sind.

b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\alpha_1) \neq \mathbb{Q}(\alpha_2)$ (als Teilkörper von $\mathbb{C}$).

c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\alpha_1) \cap \mathbb{Q}(\alpha_2)$.

d) Zeigen Sie, dass die Körpererweiterungen $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subset \mathbb{Q}(\alpha_1)$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subset \mathbb{Q}(\alpha_2)$ galoissch sind.

e) Sei K der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subset K$ galoissch ist und bestimmen Sie den Isomorphietyp der Galois-Gruppe.

(15 Punkte)

Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ______ **Kennwort:** ______ **Arbeitsplatz-Nr.:** ______	**Herbst 2016**	**63912**

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 6

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Seien N ein auflösbarer Normalteiler einer endlichen Gruppe G und H eine weitere auflösbare Untergruppe von G. Zeigen Sie, dass

$$NH = \{nh \mid n \in N, h \in H\}$$

wieder eine auflösbare Untergruppe von G ist. (12 Punkte)

Aufgabe 2:
Seien p eine Primzahl und $k \leq p-2$. Zeigen Sie, dass die Einheitsmatrix I_k die einzige Matrix $A \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{Q})$ mit der Eigenschaft $A^p = I_k$ ist. (12 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Zu jedem $a \in R$ existiere ein $b \in R$ mit $a^2 \cdot b = a$.

(a) Zeigen Sie, dass R reduziert ist, das heißt, dass 0 das einzige nilpotente Element in R ist.

(b) Zeigen Sie weiter, dass jedes Primideal $\mathfrak{p}$ in R maximal ist.

(12 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei $a \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren eine Folge (x_n), $n \in \mathbb{N}_0$ durch

$$x_n := a^{2^n} + 1.$$

1. Sei $n < m$. Zeigen Sie, dass x_n ein Teiler von $x_m - 2$ ist.
2. Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler von x_n und x_m.
3. Folgern Sie, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

(12 Punkte)

Aufgabe 5:
Sei $f(X)$ ein separables Polynom über $\mathbb{Q}$, welches in der Form $f(X) = h(X^2)$ mit $h(X) \in \mathbb{Q}[X]$ und $n := \deg h(X) \geq 2$ geschrieben werden kann. Zeigen Sie, dass die Galoissche Gruppe (eines Zerfällungskörpers) von $f(X)$ nicht die volle symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_{2n}$ der Nullstellen sein kann.

(12 Punkte)

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ die obere Halbebene und $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ die Gruppe der reellen 2×2-Matrizen mit Determinante 1. Die Abbildung

$$\varrho : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times H \to H\,, \qquad \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

definiert eine Gruppenoperation von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ auf H.

(a) Geben Sie die Bahnen von ϱ an.

(b) Geben Sie den Stabilisator von $i \in H$ an.

(6+2 Punkte)

Aufgabe 2:

Seien A, B abelsche Gruppen und $\phi : B \to \mathrm{Aut}(A)$ ein Homomorphismus von B in die Gruppe der Automorphismen von A. Das *semidirekte Produkt* $A \rtimes_\phi B$ ist die folgendermaßen definierte Gruppe:

$$A \rtimes_\phi B := \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$$
$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) := (a_1\phi(b_1)(a_2), b_1 b_2)$$

(a) Zeigen Sie, dass $A \rtimes_\phi B$ genau dann abelsch ist, wenn ϕ trivial ist, also $\phi(b) = \mathrm{id}_A$ für alle $b \in B$ gilt.

(b) Konstruieren Sie eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung 2015.

(6+10 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

Im Folgenden sei K der jeweils angegebene Körper. Entscheiden Sie jeweils, ob die Matrix A über K diagonalisierbar ist, und begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, K = \mathbb{C}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, K = \mathbb{R}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, K = \mathbb{F}_5$

(d) $A = \begin{pmatrix} X+1 & 1 \\ X-1 & 2X-1 \end{pmatrix}$, K ist der rationale Funktionenkörper $\mathbb{R}(X)$.

(2+2+3+3 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei $p > 2$ eine Primzahl. Wir betrachten den Körper $\mathbb{Q}(\zeta_p, \alpha_p) \subset \mathbb{C}$ mit $\alpha_p = \sqrt[p]{p} \in \mathbb{R}$ und $\zeta_p = e^{\frac{2\pi i}{p}}$. Zeigen Sie:

(a) Die Körpererweiterung $K/\mathbb{Q}$ ist galoissch.

(b) $[K : \mathbb{Q}] = p(p-1)$.

(c) Die Teilerweiterung $\mathbb{Q}(\alpha_p)/\mathbb{Q}$ ist nicht normal und daher ist die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ nicht abelsch.

(d) $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ hat einen Normalteiler der Ordnung p.

(2+6+6+2 Punkte)

Aufgabe 5:

Sei p eine Primzahl. Wir betrachten in $\mathbb{F}_p[X]$ die Polynome $P_1 = X^2 + X + 1$ und $P_2 = X^3 + X^2 + X + 1$. Bestimmen Sie die Lösungsmenge $L \subset \mathbb{F}_p[X]$ des Kongruenzsystems

$$F \equiv X - 1 \bmod P_1 \text{ und } F \equiv 1 \bmod P_2,\ F \in \mathbb{F}_p[X].$$

(10 Punkte)

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei K ein Körper, V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $\phi: V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus von V, dessen charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Beweisen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(1) Alle Eigenräume von ϕ sind eindimensional.

(2) Zu jedem Eigenwert von ϕ existiert in der Jordanschen Normalform genau ein Jordanblock.

(3) Das Minimalpolynom und das charakteristische Polynom von ϕ sind gleich.

(12 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei $p \geq 3$ eine ungerade Primzahl und $\mathbb{F}_{p^2}$ der Körper mit p^2 Elementen. Beweisen Sie:

(a) Die Abbildung $f: \mathbb{F}_{p^2} \longrightarrow \mathbb{F}_{p^2}$, die durch $f(a) = a^p$ gegeben ist, ist ein Isomorphismus von Ringen.

(b) Durch die Vorschrift $g(a) = a + a^p$ ist eine Abbildung $g: \mathbb{F}_{p^2} \longrightarrow \mathbb{F}_p$ gegeben, und diese ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus.

(c) Durch die Vorschrift $h(a) = a^{p+1}$ ist eine Abbildung $h: \mathbb{F}_{p^2}^* \longrightarrow \mathbb{F}_p^*$ gegeben, und diese ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus.

(4+4+4 Punkte)

Aufgabe 3:

Es sei G eine Gruppe der Ordnung $|G| = 7^2 \cdot 8$. Mit Syl_7 bezeichnen wir die Menge der 7-Sylowgruppen und mit n_7 die Anzahl der 7-Sylowgruppen von G. Zeigen Sie mithilfe der folgenden Schritte, dass G nicht einfach ist.

(a) Begründen Sie, dass $n_7 \in \{1, 8\}$ gilt.

(b) Begründen Sie, dass G im Fall $n_7 = 1$ nicht einfach ist.

(c) Begründen Sie, dass
$$\cdot : G \times \mathrm{Syl}_7 \to \mathrm{Syl}_7,\ (g, P) \mapsto g\,P\,g^{-1}$$
eine transitive Operation von G auf Syl_7 ist.

(d) Begründen Sie, dass G auch im Fall $n_7 = 8$ nicht einfach ist.

(2+2+2+6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

In einem assoziativen Ring R mit Einselement gelte für jedes Element $x \in R$ entweder $x^2 = 1$ oder $x^n = 0$ für ein $n \geq 1$.

(a) Beweisen Sie, dass die Einheitengruppe von R kommutativ ist.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes Element $x \in R$ entweder x oder $1 - x$ eine Einheit ist.

(c) Beweisen Sie, dass R ein kommutativer Ring ist.

(3+3+6 Punkte)

Aufgabe 5:

Finden Sie zwei Polynome $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ gleichen Grades, so dass $\mathrm{Gal}(f)$ und $\mathrm{Gal}(g)$ gleich viele Elemente haben, aber $\mathrm{Gal}(f)$ abelsch und $\mathrm{Gal}(g)$ nicht abelsch ist. (12 Punkte)

Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: __________	**Frühjahr**	**63912**
Kennwort: __________	**2017**	
Arbeitsplatz-Nr.: ________		

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 5

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei $L|\mathbb{Q}$ eine endliche Galois'sche Körpererweiterung. Die Norm eines Elements $x \in L$ sei gegeben als

$$N(x) := \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})} \sigma(x) .$$

1. Zeigen Sie, dass $N(x) \in \mathbb{Q}$ für alle $x \in L$ und $N(xy) = N(x)N(y)$ für alle $x, y \in L$ gilt.
2. Betrachten Sie den Spezialfall $L = \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$. Zeigen Sie, dass $N(r+\sqrt{5}s) = r^2 - 5s^2$ für $r, s \in \mathbb{Q}$ gilt.
3. Betrachten Sie in L den Teilring $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{r + s\sqrt{5} \mid r, s \in \mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ gilt, dass x genau dann eine Einheit in $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ ist, wenn $N(x) \in \{1, -1\}$ gilt.
4. Zeigen Sie, dass 11 kein Primelement in $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ ist.

(12 Punkte)

Aufgabe 2:

Betrachten Sie die Körpererweiterung $L := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{3}}) \subset \mathbb{C}$ über $\mathbb{Q}$. Sei $x := \sqrt{2+\sqrt{3}} \in L$.

1. Zeigen Sie, dass $x - \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{2}$ gilt.
2. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von x über $\mathbb{Q}$.
3. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von x über $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
4. Bestimmen Sie die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$.

(12 Punkte)

Aufgabe 3:

Zeigen Sie, dass es keine einfache Gruppe der Ordnung 300 gibt.
Hinweis: Nehmen Sie an, es gäbe so eine Gruppe, und lassen Sie diese auf ihren 5-Sylowgruppen operieren. (12 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei $N \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl $N \geq 3$.

1. Zeigen Sie: Falls $2^{N-1} \not\equiv 1 \bmod N$ gilt, ist N keine Primzahl.
2. Zeigen Sie, dass die Umkehrung der Aussage nicht gilt, indem Sie das Beispiel $N = 341 = 11 \cdot 31$ betrachten.

(12 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Es seien p eine Primzahl und $\overline{\mathbb{F}}_p$ ein algebraischer Abschluss des endlichen Körpers $\mathbb{F}_p$ mit p Elementen. Für $r \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathbb{F}_{p^r} \subset \overline{\mathbb{F}}_p$ den Zwischenkörper mit p^r Elementen. Zeigen Sie:

1. Ist $n \in \mathbb{N}$ und A eine $n \times n$-Matrix mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_p$, so dass das charakteristische Polynom von A irreduzibel über $\mathbb{F}_p$ ist, so ist A über dem Körper $\mathbb{F}_{p^n}$ diagonalisierbar.
2. Für $p = 5$ ist die 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nicht über $\mathbb{F}_{125}$ diagonalisierbar, aber über $\mathbb{F}_{25}$.

(12 Punkte)

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Wie viele Elemente der Ordnung 11 gibt es in einer einfachen Gruppe der Ordnung 660?

(12 Punkte)

Aufgabe 2:

(a) Sei G eine multiplikativ geschriebene endliche Gruppe der Ordnung n und sei $g \in G$. Weiter gelte $g^{n/p} \neq 1$ für jeden Primteiler p von n.
Zeigen Sie: g erzeugt G.

(b) Zeigen Sie: $4^{3^m} \equiv 1 + 3^{m+1} \mod 3^{m+2}$ für alle $m \geq 0$.

(c) Zeigen Sie, dass die Restklasse von 2 für jedes $e \geq 1$ die Einheitengruppe des Rings $\mathbb{Z}/3^e\mathbb{Z}$ erzeugt.

(12 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei K ein endlicher Körper mit seiner multiplikativen Gruppe $(K^*, \cdot)$ und sei weiter $H := \{a^2 : a \in K^*\}$. Zeigen Sie:

(a) H ist eine Untergruppe von $(K^*, \cdot)$;

(b) $H = K^*$, falls $\operatorname{char}(K) = 2$;

(c) H hat Index 2 in K^*, falls $\operatorname{char}(K) > 2$.

(12 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei $f = X^3 + 2X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$ und sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f.

(a) Zeigen Sie: $1, \alpha, \alpha^2$ ist eine Basis des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}(\alpha)$.

(b) Schreiben Sie $(1+\alpha)^{-1}$ als Linearkombination mit rationalen Koeffizienten bezüglich dieser Basis.

(12 Punkte)

Aufgabe 5:

Sei $K/\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung vom Grad 55 mit nicht abelscher Galoisgruppe.
Zeigen Sie: Es gibt genau einen echten Zwischenkörper L von $K/\mathbb{Q}$, so dass $L/\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung ist. Berechnen Sie $[L : \mathbb{Q}]$.

(12 Punkte)

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und

$$G := SL_n(K) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K) \mid \det A = 1\}$$

die Gruppe der invertierbaren $n \times n$-Matrizen mit Einträgen aus K und Determinante 1. Wir betrachten die Abbildung

$$F\colon \ \mathrm{Mat}(n \times n, K) \to \mathrm{Mat}(n \times n, K),$$
$$F((a_{ij})) = (a_{ij}^p).$$

Zeigen Sie, dass $F(G) \subseteq G$ gilt und dass $F|_G\colon G \to G$ ein Homomorphismus von Gruppen ist. Folgern Sie daraus, dass $H = \{g \in G \mid F(g) = g\}$ eine Untergruppe von G ist, und bestimmen Sie diese Untergruppe. (12 Punkte)

Aufgabe 2:

Man zeige:

(a) Die symmetrische Gruppe S_5 hat genau sechs 5-Sylowuntergruppen.

(b) S_6 hat eine zu S_5 isomorphe und transitiv auf $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ operierende Untergruppe.

(c) S_6 hat zwei zu S_5 isomorphe Untergruppen, die nicht zueinander konjugiert sind.

(12 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ und $S = \mathbb{Z}[i] = \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$. Man zeige, dass es keinen Ringhomomorphismus $\phi : R \to S$ gibt. (Bemerkung: Ringhomomorphismen $R \to S$ bilden definitionsgemäß 1_R auf 1_S ab.) (12 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei K ein Körper, $n \geq 1$, und $\mu_A(X) \in K[X]$ das Minimalpolynom einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$. Sei $f(X) \in K[X]$ ein Polynom, das zu $\mu_A(X)$ teilerfremd ist. Man zeige, dass die Matrix $f(A)$ invertierbar ist. (12 Punkte)

Aufgabe 5:

Sei K ein endlicher Körper mit q Elementen. Man zeige, dass das Polynom $X^2 + X + 1$ genau dann irreduzibel über K ist, wenn $q \equiv -1 \pmod 3$. (12 Punkte)

Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ______ Kennwort: ______ Arbeitsplatz-Nr.: ______	**Herbst 2017**	**63912**

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 7

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei K ein endlicher Körper. Zeigen Sie, dass das Produkt aller Elemente $\neq 0$ in K gleich -1 ist.

(8 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei R ein kommutativer unitärer Ring, der den endlichen Körper $\mathbb{F}_p$ enthält. Zeigen Sie, dass die Abbildung $F\colon R \to R$, $F(x) = x^p$, ein Ringhomomorphismus ist. Geben Sie je ein Beispiel für solch einen Ring R an, für den $F\colon R \to R$

a) ein Isomorphismus,

b) kein Isomorphismus

ist (mit Begründung).

(10 Punkte)

Aufgabe 3:

Man zeige, dass keine zwei der folgenden Gruppen zueinander isomorph sind:

a) Die Einheitengruppe von $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$,

b) die Einheitengruppe von $\mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$,

c) die alternierende Gruppe A_4, und

d) die Diedergruppe D_6 (Symmetriegruppe des regulären 6-Ecks).

(14 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei $\omega = (-1 + \sqrt{3}i)/2 \in \mathbb{C}$. Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{C}$$
$$P \mapsto P(\omega).$$

Diese ist ein Ringhomomorphismus (das brauchen Sie nicht zu zeigen).

a) Bestimmen Sie die Dimension des Bildes von f als $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

b) Bestimmen Sie den Kern von f.

c) Untersuchen Sie, ob der Kern von f ein maximales Ideal in $\mathbb{Q}[X]$ ist.

(14 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Sei $K = \mathbb{C}(t)$ der Quotientenkörper des Polynomrings $\mathbb{C}[t]$ und $P(X) = X^3 - 2tX + t \in K[X]$. Zeigen Sie, dass P irreduzibel in $K[X]$ ist.

(14 Punkte)

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei K ein Körper. Eine quadratische Matrix $A \in M_n(K)$ heißt nilpotent, wenn ein $m \in \mathbb{N}$ mit $A^m = 0$ existiert. Zeigen Sie:

i) Ist $A \in M_n(K)$ nilpotent, so gilt für das charakteristische Polynom $\mathcal{X}_A(X) = X^n$.

ii) Ist $A \in M_n(K)$ nilpotent und diagonalisierbar, so gilt $A = 0$.

(8 Punkte)

Aufgabe 2:

Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne S_n die n-te symmetrische Gruppe. Die Gruppe S_n und ihre Untergruppen operieren in natürlicher Weise von links auf der Menge $\{1, \dots, n\}$. Ferner sei p eine Primzahl.

i) Für Untergruppen G_1 und G_2 in S_n sei G_2 ein Normalteiler in G_1 und G_1 operiere transitiv auf der Menge $\{1, \dots, n\}$. Zeigen Sie, dass alle G_2-Bahnen in $\{1, \dots, n\}$ dieselbe Länge haben.

ii) Für Untergruppen G_1 und G_2 in S_p sei G_2 ein Normalteiler in G_1 und G_1 operiere transitiv auf $\{1, \dots, p\}$. Zeigen Sie, dass G_2 transitiv auf $\{1, \dots, p\}$ operiert, falls $G_2 \neq \{\mathrm{id}\}$ gilt.

iii) Sei H eine Untergruppe von S_p, die transitiv auf $\{1, \dots, p\}$ operiert und eine Primzahlordnung q hat. Zeigen Sie, dass $p = q$ gilt und H ein Element der Ordnung p enthält.

(15 Punkte)

Aufgabe 3:

Ist p eine Primzahl und $q = p^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so bezeichne $\mathbb{F}_q$ den endlichen Körper mit q Elementen. Betrachten Sie die Polynome $f = X^7 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ und $g = X^7 - X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

i) Zeigen Sie, dass f keine Nullstellen in den Körpern $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_4$ und $\mathbb{F}_8$ besitzt.

ii) Folgern Sie aus i), dass f irreduzibel in $\mathbb{F}_2[X]$ ist.

iii) Zeigen Sie, dass g irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist.

(14 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Sei L der Zerfällungskörper von $X^{12} - 729 \in \mathbb{Q}[X]$ in $\mathbb{C}$ und ζ die primitive 12-te Einheitswurzel $\exp(2\pi i/12) = \frac{\sqrt{3}+i}{2} \in \mathbb{C}$.

i) Zeigen Sie: $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\zeta)$ und $L = \mathbb{Q}(\zeta)$.

ii) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ eine abelsche Gruppe der Ordnung vier ist, die genau drei Elemente der Ordnung zwei enthält.

iii) Beschreiben Sie alle echten Zwischenkörper der Erweiterung $L/\mathbb{Q}$, indem Sie für jeden echten Zwischenkörper ein primitives Element angeben.

(15 Punkte)

Aufgabe 5:

Das irreduzible Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]\setminus\{0\}$ besitze eine Nullstelle $\alpha \in \mathbb{R}$ und eine Nullstelle $\beta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Sei L der Zerfällungskörper von f in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ nicht abelsch ist.

(8 Punkte)

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Mit $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ wird die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnet.

Aufgabe 1:

Es sei G eine Gruppe der Ordnung $|G| = 992 = 2^5 \cdot 31$. Für eine Primzahl p bezeichne n_p die Anzahl der p-Sylowgruppen von G.

(1) Geben Sie die prinzipiellen Möglichkeiten für die Werte von n_2 und n_{31} an, die sich aus den Sylowsätzen ergeben.

(2) Zeigen Sie (ohne den Satz von Burnside zu benutzen), dass G auflösbar ist.

(12 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei G eine (additiv geschriebene) abelsche Gruppe. Ist die Menge

$$\{n \in \mathbb{N} \mid na = 0 \text{ für alle } a \in G\}$$

nicht leer, so heißt deren Minimum der **Exponent** der Gruppe G und wird mit $\exp(G)$ bezeichnet. Ist die obige Menge leer, so setzt man $\exp(G) = \infty$. Zeigen Sie:

(1) Ist G endlich, so ist $\exp(G) = \max\{\mathrm{ord}(a) \mid a \in G\}$.

(2) Die abelsche Gruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist eine Torsionsgruppe (d. h. zu jedem $x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nx = 0$) mit $\exp(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \infty$.

Aufgabe 3:

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und sei $a \in R$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Das Element $1 + aX$ ist eine Einheit im Polynomring $R[X]$.

(ii) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n = 0$.

(12 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Es sei α die reelle Zahl $\alpha := \sqrt[3]{2+\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$, und es sei ζ die dritte Einheitswurzel $\zeta := e^{\frac{2\pi i}{3}} \in \mathbb{C}$.

(1) Bestimmen Sie das Minimalpolynom f von α über $\mathbb{Q}$.

(2) Es sei $\beta = \sqrt[3]{2-\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für den Zerfällungskörper $L \subseteq \mathbb{C}$ von f in $\mathbb{C}$ gilt $L = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \zeta)$.

(3) Zeigen Sie, dass die reelle Zahl $\sqrt[3]{2}$ in L liegt, und folgern Sie, dass die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$ einen Normalteiler vom Index 6 besitzt.

(12 Punkte)

Aufgabe 5:

Es seien K ein Teilkörper von $\mathbb{R}$ und $f \in K[X]$ ein Polynom. Weiter sei $Z \subseteq \mathbb{C}$ ein Zerfällungskörper von f über K. Der Grad $[Z : K]$ sei ungerade. Zeigen Sie, dass dann auch Z ein Teilkörper von $\mathbb{R}$ ist. (12 Punkte)